

Statique des coques élastiques

Jean GARRIGUES

Mai 1999

Chapitre 1

Introduction

La théorie des coques est l'étude des solides déformables surfaciques. Elle est adaptée à l'étude de solides déformables dont la géométrie est assimilable à une surface avec une épaisseur. Comme en théorie des poutres qui est l'étude des solides déformables linéiques (une courbe avec une épaisseur), cette géométrie va permettre d'établir une théorie simplifiée dans laquelle on dira qu'on connaît suffisamment les déplacements en connaissant seulement ceux de la surface moyenne.

La démarche sera la suivante:

- Étude de la géométrie des surfaces¹. On introduira le tenseur courbure normale et les notions de géométrie différentielle et d'analyse strictement nécessaires pour la suite.
- Étude de la déformation des surfaces, où on introduira les notions de déformation de surface et de variation de courbure, qu'on particularise ensuite aux petites déformations.
- Étude des efforts intérieurs dans une coque. Ils seront représentés par trois tenseurs: le tenseur tenseur tension, le tenseur des moments linéiques et le tenseur tranchant.
- Écriture des équations d'équilibre des coques par application du principe fondamental de la mécanique appliqué aux coques.

L'objet du cours étant la statique des coques élastiques, on déduira de la loi élastique tridimensionnelle :

- une loi de comportement élastique des coques, qui relie les contraintes généralisées aux déformations et aux variations de courbure de la surface moyenne².
- des applications à des coques particulières : les plaques, les voiles et les membranes.

Alors que les quatre premiers points sont valables pour toutes les coques, les deux derniers ne sont valables que dans le domaine de l'élasticité en petites déformations.

Ce cours suppose connues les notions d'algèbre et d'analyse tensorielle introduites au début du cours de mécanique des milieux continus. L'analyse tensorielle dans les variétés de dimension 2 plongées dans \mathcal{E}_3 présentant des différences avec l'analyse classique dans \mathcal{E}_3 , elle sera reprise rapidement, dans les limites du strict nécessaire.

1. Cette étude sera notablement plus substantielle qu'en théorie des poutres: En effet, si les notions de courbure et de torsion d'une courbe dans l'espace \mathcal{E}_3 sont classiquement exposées dans les cours de géométrie différentielle élémentaires, il n'en est pas de même pour les surfaces.

2. De même qu'en poutres, les lois de comportement relient le torseur intérieur à l'allongement et aux variations de courbure de la ligne moyenne.

Chapitre 2

Étude des surfaces

On se place dans l'espace euclidien habituel \mathcal{E}_3 , muni du produit scalaire et du produit vectoriel habituels.

2.1 Définition d'une surface

Soit (x^1, x^2) un couple de paramètres appartenant à un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 .
Soit f une application de \mathcal{D} dans \mathcal{E}_3 :

$$f : (x^1, x^2) \rightarrow M$$

On appelle surface \mathcal{S} l'ensemble des points M tels que

$$\mathcal{S} = \{M \mid M = f(x^1, x^2) \forall (x^1, x^2) \in \mathcal{D}\}$$

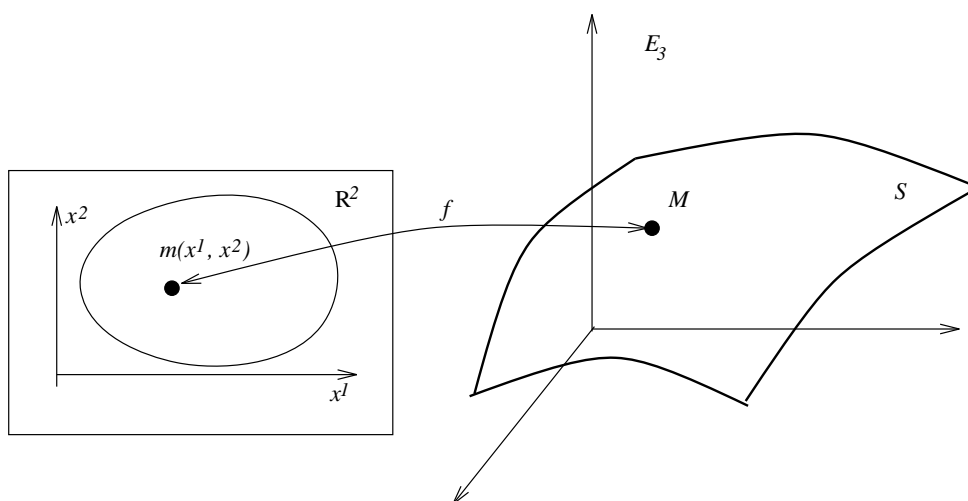


FIG. 2.1 – Définition d'une surface

On admettra que \mathcal{D} a les qualités topologiques et que f a les propriétés de continuité et de dérivabilité suffisantes pour que les calculs de la suite aient un sens¹.

1. Il est possible que ces propriétés ne soient vérifiées que par morceaux sur \mathcal{D} . Il faudra alors écrire des conditions de « raccord » sur les frontières communes à deux morceaux.

On dit que \mathcal{S} est une surface, paramétrée par les deux paramètres x^1 et x^2 . C'est une variété de dimension 2 plongée dans \mathcal{E}_3 .

2.2 Plan tangent

2.2.1 Base naturelle associée à un paramétrage

Soit \mathcal{S} une surface paramétrée par (x^1, x^2) . On appelle *base naturelle de \mathcal{S} associée au paramétrage (x^1, x^2)* la base formée par les deux vecteurs :

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^1} \quad ; \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^2}$$

Cette base définit un sous espace vectoriel de dimension 2 qui varie *a priori* avec le point M et le choix du paramétrage.

2.2.2 Plan tangent

Considérons le changement de paramètres *bijectif* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y^1 = Y^1(x^1, x^2) \\ y^2 = Y^2(x^1, x^2) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x^1 = X^1(y^1, y^2) \\ x^2 = X^2(y^1, y^2) \end{array} \right\}$$

qui met en bijection le domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 avec un domaine \mathcal{D}' de \mathbb{R}^2 .

On peut alors paramétrer la même surface \mathcal{S} avec le couple (y^1, y^2) . La nouvelle base naturelle de \mathcal{S} est alors

$$\mathbf{a}'_1 = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial y^1} \quad ; \quad \mathbf{a}'_2 = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial y^2}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial y^1} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} + \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial y^1} = \mathbf{a}_1 \frac{\partial x^1}{\partial y^1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \\ \mathbf{a}'_2 &= \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial y^2} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \mathbf{a}_1 \frac{\partial x^1}{\partial y^2} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \end{aligned}$$

ce qui montre que, bien que la base $\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2\}$ soit différente de la base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, le sous-espace qu'elles engendrent est le même.

On appelle ce plan la *plan tangent en M à S en M* . Dans la suite, il sera noté $\Pi(M)$ ou plus simplement Π .

2.2.3 Normale à une surface

On appelle normale à la surface associée au paramétrage (x^1, x^2) le vecteur *unitaire* défini par :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}$$

Il faut bien noter que bien qu'un plan Π ne possède que deux normales unitaires opposées, l'orientation de la normale dépend du paramétrage de S^2 .

2. Pour s'en convaincre il suffit de faire le changement de paramètres $y^1 = x^2$; $y^2 = x^1$. On a alors $\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_1$. et donc $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$

Les vecteurs \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 et \mathbf{n} forment une base locale de \mathcal{E}_3 . Pour des commodités d'indice, on posera souvent

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$$

Au point M d'une surface \mathcal{S} , on peut donc considérer deux bases: une base plane $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ du plan tangent Π , et une base d'espace $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}\}$

2.2.4 Convention d'indice

Soit un champ de vecteurs $\mathbf{X}(M)$ défini sur la surface \mathcal{S} . On peut l'exprimer sur la base locale en M :

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^3 X^i \mathbf{a}_i = \sum_{\alpha=1}^2 X^\alpha \mathbf{a}_\alpha + X^3 \mathbf{n}$$

On utilisera dans la suite une convention d'Einstein *modifiée*:

- les indices en caractères latins varient de 1 à 3
- les indices en caractères grecs varient de 1 à 2

On écrit donc :

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{a}_i = X^\alpha \mathbf{a}_\alpha + X^3 \mathbf{n}$$

La partie $X^\alpha \mathbf{a}_\alpha$ est appelée *partie tangente* du vecteur \mathbf{X} .

La partie $X^3 \mathbf{n}$ est appelée *partie normale* du vecteur \mathbf{X} .

2.3 Tenseurs de surface

Le plan tangent en M à une surface \mathcal{S} est un espace vectoriel de dimension 2. Les tenseurs définis dans cet espace sont appelés *tenseurs de surface*. Toute l'algèbre tensorielle qui a été définie dans \mathcal{E}_3 est immédiatement transposable dans Π . La seule différence est que les vecteurs de Π n'ont que deux composantes. On rappelle ici, sans démonstration, les points importants.

- Il existe dans Π une base duale \mathbf{a}^α définie par :

$$\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha$$

- Si \mathbf{V} est un vecteur de Π , on a :

$$\mathbf{V} = V^\alpha \mathbf{a}_\alpha = V_\alpha \mathbf{a}^\alpha$$

Les quantités V^α sont les *composantes contravariantes* de \mathbf{V} ; $V^\alpha = \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}^\alpha$

Les quantités V_α sont les *composantes covariantes* de \mathbf{V} ; $V_\alpha = \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}_\alpha$

- Les *tenseurs de surface* d'ordre p sont les applications p -linéaires de Π^p dans \mathbb{R} .

Par exemple, si \mathbf{T} est un tenseur de surface du second ordre :

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = T_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta = T^{\alpha\beta} U_\alpha V_\beta = T_\alpha^\beta U^\alpha V_\beta = T^\alpha_\beta U_\alpha V^\beta$$

- L'ensemble des tenseurs d'ordre p est un espace vectoriel.

Par exemple, pour les tenseurs du second ordre, on a

$$\mathbf{T} = T_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta = T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta = T_\alpha^\beta \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta = T^\alpha_\beta \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta$$

Ses composantes dans ces bases sont :

$$T_{\alpha\beta} = \mathbf{T}(\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta) ; T^{\alpha\beta} = \mathbf{T}(\mathbf{a}^\alpha, \mathbf{a}^\beta) ; T_\alpha^\beta = \mathbf{T}(\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}^\beta) ; T^\alpha_\beta = \mathbf{T}(\mathbf{a}^\alpha, \mathbf{a}_\beta)$$

Les différentes sortes de composantes d'un tenseur de surface du second ordre peuvent se ranger dans les matrices carrées 2×2 .

$$[T_{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} ; [T^{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{bmatrix} ; [T_\bullet^\bullet] = \begin{bmatrix} T_{11}^1 & T_{12}^1 \\ T_{21}^1 & T_{22}^1 \end{bmatrix} ; [T^\bullet_\bullet] = \begin{bmatrix} T_{11}^2 & T_{12}^2 \\ T_{21}^2 & T_{22}^2 \end{bmatrix}$$

- Les tenseurs de surface du second ordre ont un endomorphisme associé :

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}(\mathbf{V}) = \mathbf{T}(\bullet, \mathbf{V}) = \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{V} = T_{\alpha\beta} V^\beta \mathbf{a}^\alpha = T^{\alpha\beta} V_\beta \mathbf{a}_\alpha = T_{\alpha}^\beta V_\beta \mathbf{a}^\alpha = T^\alpha_\beta V^\beta \mathbf{a}_\alpha$$

soit en termes matriciels :

$$\begin{aligned} [W^\bullet] &= [T^{\bullet\bullet}] [V_\bullet] = [T^\bullet_\bullet] [V^\bullet] \\ [W_\bullet] &= [T_{\bullet\bullet}] [V^\bullet] = [T_\bullet^\bullet] [V_\bullet] \end{aligned}$$

- Un tenseur de surface du second ordre symétrique est tel que

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{T}(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \Rightarrow [T_{\bullet\bullet}] = [T_{\bullet\bullet}]^t ; [T^{\bullet\bullet}] = [T^{\bullet\bullet}]^t ; [T_\bullet^\bullet] = [T^\bullet_\bullet]^t$$

- Un tenseur de surface du second ordre antisymétrique est tel que

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = -\mathbf{T}(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \Rightarrow [T_{\bullet\bullet}] = -[T_{\bullet\bullet}]^t ; [T^{\bullet\bullet}] = -[T^{\bullet\bullet}]^t ; [T_\bullet^\bullet] = -[T^\bullet_\bullet]^t$$

- Le transposé d'un tenseur de surface du second ordre est un tenseur de surface du second ordre défini par :

$$\mathbf{T}^t(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{T}(\mathbf{V}, \mathbf{U}) \Rightarrow [T_{\bullet\bullet}^t] = [T_{\bullet\bullet}]^t ; [T^{\bullet\bullet t}] = [T^{\bullet\bullet}]^t ; [T_\bullet^t] = [T^\bullet_\bullet]^t$$

- Tout tenseur de surface du second ordre est décomposable de manière unique en la somme de sa *partie symétrique* et de sa *partie antisymétrique* :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^t) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^t)$$

- Les deux invariants d'un tenseur de surface du second ordre de surface sont :

$$\text{Tr} \mathbf{T} = \text{Tr} [T_\bullet^\bullet] = \text{Tr} [T^\bullet_\bullet] ; \det \mathbf{T} = \det [T_\bullet^\bullet] = \det [T^\bullet_\bullet]$$

- Les valeurs propres et les vecteurs propres d'un tenseur de surface du second ordre sont les solutions de l'équation

$$\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \iff (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{A}) \overline{\otimes} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Les composantes covariantes de \mathbf{v} sont donc solutions de l'équation matricielle

$$([T^\bullet_\bullet] - \lambda I) \overline{\otimes} [v^\bullet] = 0$$

où I est la matrice identité.

2.3.1 Tenseur métrique de surface

Le tenseur métrique de surface est le tenseur de surface du second ordre \mathbf{A} défini par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$$

Il est symétrique et ses composantes dans la base naturelle sont :

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta ; a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta ; a_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} ; a^{\alpha}_{\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$$

Les matrices $[A_{\bullet\bullet}]$ et $[A^{\bullet\bullet}]$ sont inverses et on note

$$a = \det [A_{\bullet\bullet}]$$

On vérifie facilement que $\text{Tr}\mathbf{A} = 2$ et $\det \mathbf{A} = 1$,
et que l'endomorphisme associé au tenseur métrique est l'identité: $\mathbf{A} \otimes \mathbf{U} = \mathbf{U} \forall \mathbf{U} \in \Pi$.

$$V^\alpha = a^\alpha_{\beta} V^\beta = \delta^\alpha_{\beta} V^\beta ; V_\alpha = a_{\alpha}^{\beta} V_\beta = \delta_{\alpha}^{\beta} V_\beta ; V_\alpha = a_{\alpha\beta} V^\beta ; V^\alpha = a^{\alpha\beta} V_\beta$$

(propriété dite d'« ascenseur d'indices ».)

2.3.2 Tenseur d'orientation de surface

Le tenseur d'orientation de surface est le tenseur de surface du second ordre³ $\overline{\mathbf{E}}$ défini par :

$$\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{n})$$

où $(\bullet, \bullet, \bullet)$ est le produit mixte.

Son antisymétrie est évidente. Les composantes covariantes sont :

$$\overline{e}_{\alpha\beta} = \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta) = (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta, \mathbf{n})$$

soit encore explicitement :

$$\overline{e}_{11} = 0 ; \overline{e}_{22} = 0 ; \overline{e}_{12} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}) ; \overline{e}_{21} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{n}) = -\overline{e}_{12}$$

Il suffit donc de connaître $\overline{e}_{12} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{n}$. Puisque $(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)$ est un vecteur porté par \mathbf{n} , il suffit d'en calculer le module.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|^2 &= (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \\ &= (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)) \\ &= \mathbf{a}_1 \cdot [\mathbf{a}_2 \wedge (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)] \end{aligned}$$

En développant le double produit vectoriel, puis les produits scalaires, on trouve :

$$\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det [a_{\bullet\bullet}] = a$$

Les composantes covariantes du tenseur d'orientation de surface sont donc :

$$[\overline{e}_{\bullet\bullet}] = \sqrt{a} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Contrairement au tenseur d'orientation défini dans \mathcal{E}_3 , le tenseur d'orientation de surface n'est pas un tenseur du troisième ordre.

On établira facilement⁴ les composantes contravariantes :

$$[\bar{e}^{\bullet\bullet}] = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les invariants du tenseur d'orientation de surface sont :

$$\text{Tr} \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad ; \quad \det \bar{\mathbf{E}} = 1$$

L'endomorphisme associé à $\bar{\mathbf{E}}$ est une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de \mathbf{n} . En effet,

$$\bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{U} = \bar{e}_{\alpha\beta} U^\beta \mathbf{a}^\alpha = (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta, \mathbf{n}) U^\beta \mathbf{a}^\alpha = (\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{U}, \mathbf{n}) \mathbf{a}^\alpha = [\mathbf{a}_\alpha \cdot (\mathbf{U} \wedge \mathbf{n})] \mathbf{a}^\alpha = (\mathbf{U} \wedge \mathbf{n})_\alpha \mathbf{a}^\alpha$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{U} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{U}}$$

La composition de l'endomorphisme $\bar{\mathbf{E}}$ avec lui-même est donc une rotation de $-\pi$, c'est à dire une multiplication du vecteur par -1 .

$$\bar{\mathbf{E}} \circ \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} = -\mathbf{A}$$

c'est à dire en termes de composantes

$$\boxed{\bar{e}_{\alpha\gamma} \bar{e}^{\gamma\beta} = -\delta_\alpha^\beta}$$

Cette propriété algébrique est très utile dans les calculs.

Enfin, on montrera facilement que le produit doublement contracté de $\bar{\mathbf{E}}$ avec tout tenseur de surface du second ordre symétrique est nul.

$$\boxed{\bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{T} \text{ symétrique}}$$

2.3.3 Produits vectoriels

Le tenseur d'orientation de surface est utile pour exprimer les composantes des produits vectoriels :

- Soient \mathbf{U} et \mathbf{V} deux vecteurs du plan tangent Π . Leur produit vectoriel est porté par \mathbf{n} . Il suffit donc de calculer la composante sur \mathbf{n} de $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}$.

$$(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{n}) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{U} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{V}$$

On a donc

$$\boxed{\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = (\mathbf{U} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{V}) \mathbf{n}}$$

soit en termes de composantes :

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = \bar{e}_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta \mathbf{n} = \bar{e}^{\alpha\beta} U_\alpha V_\beta \mathbf{n}$$

- Soit \mathbf{U} un vecteur tangent et soit \mathbf{n} la normale, on a

$$\boxed{\mathbf{n} \wedge \mathbf{U} = -\bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{U}}$$

4. en utilisant l'ascenseur d'indices.

soit en termes de composantes :

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{U} = -\bar{e}_{\alpha\beta} U^\beta \mathbf{a}^\alpha = -\bar{e}^{\alpha\beta} U_\beta \mathbf{a}_\alpha$$

• Soient deux vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} non tangents. On note $\text{Tg}(\mathbf{X}) = X^\alpha \mathbf{a}_\alpha = X_\alpha \mathbf{a}^\alpha$ la partie tangente de \mathbf{X} . Leur produit vectoriel est :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} &= (\text{Tg}(\mathbf{X}) + X^3 \mathbf{n}) \wedge (\text{Tg}(\mathbf{Y}) + Y^3 \mathbf{n}) \\ &= \text{Tg}(\mathbf{X}) \wedge \text{Tg}(\mathbf{Y}) + Y^3 \text{Tg}(\mathbf{X}) \wedge \mathbf{n} + X^3 \mathbf{n} \wedge \text{Tg}(\mathbf{Y}) \end{aligned}$$

$\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = (\text{Tg}(\mathbf{X}) \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \text{Tg}(\mathbf{Y})) \mathbf{n} - X^3 \bar{\mathbf{E}} \otimes \text{Tg}(\mathbf{Y}) + Y^3 \bar{\mathbf{E}} \otimes \text{Tg}(\mathbf{X})$ Soit en termes de composantes :
--

$\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = \bar{e}_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \mathbf{n} - X^3 \bar{e}_{\alpha\beta} Y^\beta \mathbf{a}^\alpha + Y^3 \bar{e}_{\alpha\beta} X^\beta \mathbf{a}^\alpha$
--

$\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = \bar{e}^{\alpha\beta} X_\alpha Y_\beta \mathbf{n} - X_3 \bar{e}^{\alpha\beta} Y_\beta \mathbf{a}_\alpha + Y_3 \bar{e}^{\alpha\beta} X_\beta \mathbf{a}_\alpha$
--

2.3.4 Nouvelle expression de la normale

On a montré précédemment que $\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\| = \sqrt{a}$. La normale à la surface s'écrit donc :

$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\sqrt{a}}$
--

2.4 L'analyse dans les surfaces

En théorie des coques, on a à considérer des champs (scalaires, vectoriels ou tensoriels) définis sur la surface. Ils sont appelés *champs surfaciques*.

De plus, on apporte une restriction supplémentaire : les champs vectoriels et tensoriels sont des *champs tangents*, c'est à dire que leurs composantes sont sur la base naturelle $\{\mathbf{a}_\alpha\}$, ou sur sa duale $\{\mathbf{a}^\alpha\}$, ou sur leurs produits tensoriels. De tels champs sont appelés *champs surfaciques tangents*.

Ainsi, un champ surfacique vectoriel tangent est tel que :

$$M \in \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{V}(M) \in \Pi$$

De même, un champ surfacique tensoriel du second ordre tangent est tel que :

$$M \in \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{T}(M) \in \Pi \otimes \Pi$$

L'objet de l'analyse sur les surfaces est d'étudier les variations de ces champs lorsque le point M (c'est à dire le couple de paramètres (x^1, x^2) qui définit M) varie sur la surface. Des difficultés vont naître du fait que le plan Π varie avec M .

Remarque importante

On aura aussi besoin de considérer des champs surfaciques vectoriels non tangents⁵. Dans ce cas, on décompose le champ vectoriel en partie tangente et en partie normale.

— La partie tangente est un champ surfacique vectoriel tangent dont on peut étudier les variations avec les techniques de l'analyse des surfaces.

— La partie normale est un vecteur porté par \mathbf{n} . On peut la voir comme un champ scalaire (la composante suivant \mathbf{n} du champ vectoriel) multiplié par \mathbf{n} . Pour étudier les variations de la partie normale, il faut donc étudier les variations de \mathbf{n} .

⁵. Par exemple, le champ des déplacements $\boldsymbol{\xi}(M)$ des points d'une coque n'est généralement pas tangent à la surface.

L'analyse dans les surfaces

Dans la suite du cours, on se limite au strict nécessaire . On abordera donc l'étude des points suivants :

- Définition des éléments de longueur et de surface. On pourra ainsi calculer des intégrales le long d'arcs de courbes tracées sur la surface, et des intégrales doubles sur une portion de la surface.
- Étude des variations de \mathbf{n} . Cette partie amènera la notion de courbure de la surface.
- Étude des variations de la base naturelle et de la base duale.
- Étude des champs scalaires (gradient de surface)
- Étude des champs vectoriels tangents (gradient de surface, divergence de surface, rotationnel de surface, théorème de Stokes, théorème de la divergence)
- Étude des champs tensoriels de surface du second ordre (gradient de surface, divergence de surface, théorème de la divergence)

2.5 Métrique dans les surfaces

2.5.1 Élément de longueur

Un point courant M de la surface est fonction des deux paramètres x^1 et x^2 . Sa différentielle est donc :

$$dM = \partial_\alpha OM dx^\alpha = dx^\alpha \mathbf{a}_\alpha$$

dM est donc un vecteur tangent.

Dans la base naturelle, les composantes de dM sont les variations dx^α , quelsoit le paramétrage.

L'élément de longueur sur la surface \mathcal{S} est donc défini par:

$$dl^2 = dM \cdot dM = (dx^\alpha \mathbf{a}_\alpha) \cdot (dx^\beta \mathbf{a}_\beta)$$

On a donc :

$$\boxed{dl^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \mathbf{A}(dM, dM)}$$

Le tenseur métrique permet de calculer dl^2 .

2.5.2 Élément de surface

Considérons la variation dM_1 de M à x^2 fixé, ainsi que la variation dM_2 de M à x^1 fixé.

$$dM_1 = \partial_1 OM dx^1 = \mathbf{a}_1 dx^1 ; \quad dM_2 = \partial_2 OM dx^2 = \mathbf{a}_2 dx^2$$

dM_1 et dM_2 sont des vecteurs tangents, et leur produit vectoriel est porté par \mathbf{n} .

L'élément de surface est défini par :

$$dS = (dM_1 \wedge dM_2) \cdot \mathbf{n} = \overline{\mathbf{E}}(dM_1, dM_2) = \bar{e}_{12} dx^1 dx^2$$

On a donc :

$$\boxed{dS = \sqrt{a} dx^1 dx^2}$$

Le tenseur métrique permet de calculer dS .

2.6 Tenseur de courbure normale

On se propose maintenant d'étudier les variations de la normale \mathbf{n} quand M varie.

On peut remarquer que le vecteur $d\mathbf{n}$ est un vecteur tangent. En effet,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \Rightarrow d\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$$

2.6.1 Définition du tenseur de courbure normale

L'opérateur $dM \rightarrow d\mathbf{n}$ est donc un endomorphisme linéaire⁶ de Π . On pose :

$$d\mathbf{n} = -\mathbf{B} \overline{\otimes} dM$$

On appelle *Tenseur courbure normale*⁷ \mathbf{B} le tenseur du second ordre associé à cet endomorphisme linéaire :

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{V}, dM) = -\mathbf{V} \cdot d\mathbf{n} \quad \forall \mathbf{V} \in \Pi}$$

Or,

$$-\mathbf{V} \cdot d\mathbf{n} = -(V^\alpha \mathbf{a}_\alpha) \cdot (\partial_\beta \mathbf{n} dx^\beta) = -(\mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \mathbf{n}) V^\alpha dx^\beta$$

On en déduit par identification les composantes covariantes de \mathbf{B} :

$$\boxed{b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \mathbf{n}}$$

En remarquant que

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \mathbf{n} = \partial_\beta (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha = 0 - \mathbf{n} \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha$$

on obtient une autre expression des composantes covariantes de \mathbf{B} :

$$\boxed{b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha}$$

On sait donc calculer les composantes covariantes de \mathbf{B} si on sait calculer les dérivées des vecteurs de la base naturelle.

De plus, cette dernière expression permet de voir que \mathbf{B} est un tenseur *symétrique* :

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{n} \cdot \partial_\beta \partial_\alpha OM = \mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \partial_\beta OM = \mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = b_{\beta\alpha}$$

On a donc

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{V}, dM) = \mathbf{B}(dM, \mathbf{V}) = -\mathbf{V} \cdot d\mathbf{n} \quad ; \quad d\mathbf{n} = -\mathbf{B} \overline{\otimes} dM = -b_{\alpha\beta} dx^\beta \mathbf{a}^\alpha}$$

Les dérivées de la normale \mathbf{n} s'écrivent :

$$\boxed{\partial_\beta \mathbf{n} = -b_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha = -\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{a}_\beta}$$

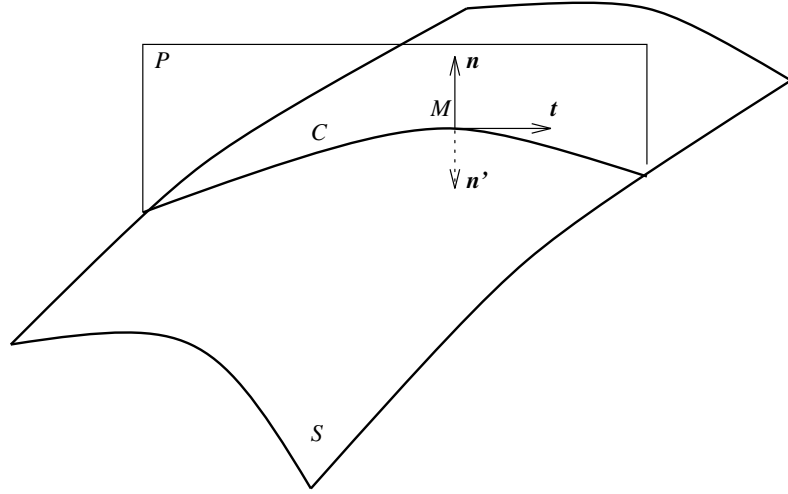


FIG. 2.2 – Interprétation géométrique du tenseur courbure

2.6.2 Interprétation géométrique

Soit une surface S de point courant M dont la normale en M est \mathbf{n} . On considère un plan \mathcal{P} passant par M contenant \mathbf{n} . \mathcal{P} est appelé *plan normal en M* . On appelle \mathcal{C} la courbe d'intersection de \mathcal{P} avec S . On note \mathbf{t} la tangente unitaire à \mathcal{C} en M et l l'abscisse curviligne de M sur \mathcal{C} .

Si M est astreint à rester sur \mathcal{C} , \mathbf{t} étant le premier vecteur de Fresnet de \mathcal{C} , on a

$$\mathbf{t} = \frac{dM}{dl}$$

La normale principale \mathbf{n}' de \mathcal{C} (le second vecteur du trièdre de Fresnet de \mathcal{C} en M) est définie par

$$\frac{\mathbf{n}'}{R} = \frac{d\mathbf{t}}{dl}$$

où R est le rayon de courbure de \mathcal{C} en M .

La courbe \mathcal{C} étant plane, sa normale principale \mathbf{n}' en M est nécessairement dans le plan. On a donc :

$$\mathbf{n}' = \pm \mathbf{n}$$

De plus, sa torsion géométrique est nulle et donc :

$$\frac{d\mathbf{n}'}{dl} = -\frac{\mathbf{t}}{R}$$

Soit \mathbf{B} le tenseur courbure normale de S en M . De sa définition il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{t}, dM) &= -\mathbf{t} \cdot d\mathbf{n} \\ \mathbf{B}(\mathbf{t}, \mathbf{t} dl) &= \mp \mathbf{t} \cdot d\mathbf{n}' \\ \mathbf{B}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) dl &= \mp \mathbf{t} \cdot \left(-\frac{\mathbf{t}}{R}\right) dl \end{aligned}$$

6. La linéarité découle de celle de la notion de différentielle

7. Cette dénomination sera justifiée par l'interprétation géométrique.

et donc

$$\mathbf{B}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = \pm \frac{1}{R}$$

L'opération $\mathbf{B}(\mathbf{t}, \mathbf{t})$ donne au signe près⁸ la courbure normale en M dans la direction \mathbf{t} , c'est à dire la courbure de l'intersection du plan (\mathbf{n}, \mathbf{t}) avec la surface.

2.6.3 Propriétés de la courbure normale

Le tenseur courbure normale \mathbf{B} étant un tenseur de surface du second ordre symétrique, il en possède toutes les propriétés :

— Il existe deux directions orthogonales dans le plan tangent Π qui sont les directions propres de \mathbf{B} . On les appelle *directions principales de courbure* en M . Les courbes enveloppes des directions principales sont appelées *lignes de courbure normale*. Elles forment un réseau orthogonal de courbes sur la surface.

— Sur ces directions principales, on peut choisir⁹ une base orthonormée directe qu'on appelle *base principale*.

— Dans la base principale orthonormée, les matrices des composantes de toute variance sont diagonales et la diagonale contient les valeurs propres. Les valeurs propres de \mathbf{B} sont appelées *courbures principales de \mathcal{S} en M* . On les note $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$.

— Les courbures principales sont les extrema de toutes les courbures normales dans toutes les directions \mathbf{t} autour de M .

— Les invariants de \mathbf{B} sont :

$$\text{Tr} \mathbf{B} = \text{Tr} [b^{\bullet} \bullet] = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ est appelé courbure moyenne en } M.$$

$$\det \mathbf{B} = \det [b^{\bullet} \bullet] = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} \text{ est appelé courbure gaussienne en } M.$$

— Suivant le signe de la courbure gaussienne en M , on peut caractériser la forme locale de la surface :

Si $\det \mathbf{B} > 0$ on dit que M est un point *elliptique*

Si $\det \mathbf{B} < 0$ on dit que M est un point *hyperbolique*

Si $\det \mathbf{B} = 0$ on dit que M est un point *parabolique*

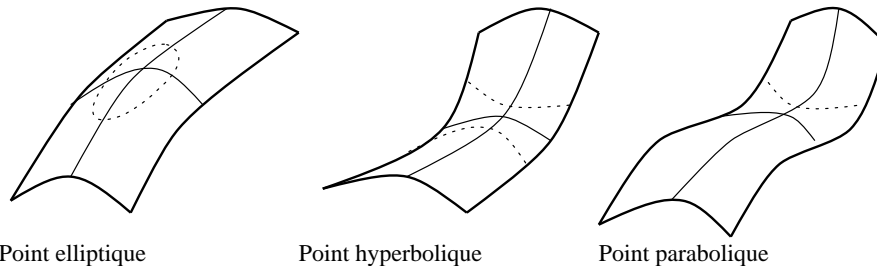


FIG. 2.3 – Formes locales d'une surface en fonction de la courbure gaussienne

Les lignes pointillées donnent l'allure de l'intersection de la surface avec un plan parallèle au plan tangent.

8. L'ambiguïté du signe vient de ce que l'orientation de la normale \mathbf{n} à \mathcal{S} est arbitraire: elle dépend du choix du paramétrage.

9. Il y a quatre choix possibles.

2.7 Variations de la base naturelle

On se propose d'étudier comment varie la base naturelle lorsque M varie. *A priori*, les dérivées de vecteurs tangents ne sont pas tangents. On pose donc :

$$\partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^i \mathbf{a}_i = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{a}_\gamma + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^3 \mathbf{n}$$

On va montrer que les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^i$ s'expriment en fonction du tenseur de courbure normale et du tenseur métrique de surface.

Calcul des $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^3$

$$\mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^3$$

ce qui est la définition des composantes covariantes du tenseur courbure.

On en déduit : $b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta$. On a donc

$$\boxed{\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta}}$$

Les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^3$ sont les composantes deux fois covariantes du tenseur de courbure normale.

Calcul des $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha = \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^\gamma$$

Cette égalité montre que les $\bar{\Gamma}_{\bullet\bullet}^\bullet$ sont symétriques par rapport aux deux indices inférieurs.

On peut calculer les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ en fonction du tenseur métrique :

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = a^{\gamma\mu} \mathbf{a}_\mu \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta$$

Or,

$$\partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \mathbf{a}_\beta + \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha)$$

On a donc :

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} a^{\gamma\mu} \mathbf{a}_\mu \cdot (\partial_\alpha \mathbf{a}_\beta + \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha) = \frac{1}{2} a^{\gamma\mu} (\mathbf{a}_\mu \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_\mu \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha)$$

En remarquant que

$$\mathbf{a}_\mu \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = \partial_\alpha a_{\mu\beta} - \mathbf{a}_\beta \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\mu \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_\mu \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha = \partial_\beta a_{\mu\alpha} - \mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\mu$$

on trouve¹⁰ :

$$\boxed{\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} a^{\gamma\mu} (\partial_\alpha a_{\mu\beta} + \partial_\beta a_{\mu\alpha} - \partial_\mu a_{\alpha\beta})}$$

Les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ sont appelés *coefficients de connexion riemannienne*. Leur valeur en fonction du tenseur métrique est formellement la même que les coefficients de Christoffel, mais leur signification est

10. Cette manière de calculer les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$, n'est pas toujours la plus efficace. Il est souvent plus rapide de calculer les dérivées de la base naturelle et de les exprimer sur la base naturelle. On en déduit les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ et les $b_{\alpha\beta}$ par identification.

différente¹¹ : Il ne donnent que la partie tangente de la dérivée des vecteurs de la base naturelle. La partie normale de cette dérivée est donnée par le tenseur courbure.

Finalement, la dérivée des vecteurs de base est :

$$\partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{a}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}$$

On peut aussi calculer les dérivées de la base duale :

$$\mathbf{a}^\gamma \cdot \mathbf{a}_\beta = \delta_\beta^\gamma \Rightarrow \partial_\alpha (\mathbf{a}^\gamma \cdot \mathbf{a}_\beta) = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_\beta \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}^\gamma = -\mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta$$

Les composantes de la partie tangente de la dérivée de \mathbf{a}^γ sont donc :

$$\mathbf{a}_\beta \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}^\gamma = -\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$$

On évalue la composante normale de la dérivée de la même manière :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}^\gamma = 0 \Rightarrow \partial_\alpha (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}^\gamma) = 0$$

On en déduit que :

$$\mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}^\gamma = -\mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_\alpha \mathbf{n} = -\mathbf{a}^\gamma \cdot (-b^\beta_{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta) = b^\gamma_\alpha$$

Finalement, la dérivée de la base duale est :

$$\partial_\alpha \mathbf{a}^\gamma = -\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{a}^\beta + b^\gamma_\alpha \mathbf{n}$$

2.8 Dérivée d'un vecteur

2.8.1 Dérivée d'un vecteur tangent

Soit $\mathbf{V}(M)$ un champ surfacique de vecteurs tangents donné par ses composantes contravariantes $V^\beta(M)$, sa dérivée par rapport aux paramètres (x^1, x^2) est :

$$\partial_\alpha \mathbf{V} = \partial_\alpha (V^\beta \mathbf{a}_\beta) = \partial_\alpha V^\beta \mathbf{a}_\beta + V^\beta \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{a}_\gamma + V^\beta b_{\alpha\beta} \mathbf{n} = (\partial_\alpha V^\beta + V^\gamma \overline{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta) \mathbf{a}_\beta + V^\beta b_{\alpha\beta} \mathbf{n}$$

Si $\mathbf{V}(M)$ est donné par ses composantes covariantes $V_\beta(M)$, on obtient :

$$\partial_\alpha \mathbf{V} = \partial_\alpha (V_\beta \mathbf{a}^\beta) = \partial_\alpha V_\beta \mathbf{a}^\beta - V_\beta \overline{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta \mathbf{a}^\gamma + V_\beta b_{\alpha\beta} \mathbf{n} = (\partial_\alpha V_\beta - V_\gamma \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma) \mathbf{a}^\beta + V_\beta b_{\alpha\beta} \mathbf{n}$$

La dérivée d'un champ vectoriel tangent, n'est pas en général un champ vectoriel tangent (sauf si la courbure est nulle, c'est à dire si la surface est plane).

2.8.2 Dérivée d'un vecteur spatial

Soit $\mathbf{X}(M)$ un champ surfacique de vecteurs de \mathcal{E}_3 donné par ses composantes contravariantes $X^i(M)$. Sa dérivée par rapport aux paramètres (x^1, x^2) est :

$$\partial_\alpha \mathbf{X} = \partial_\alpha (X^\beta \mathbf{a}_\beta + X^3 \mathbf{n}) = (\partial_\alpha X^\beta + X^\gamma \overline{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta - X^3 b_{\alpha\beta}) \mathbf{a}_\beta + (X^\gamma b_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha X^3) \mathbf{n}$$

Si $\mathbf{X}(M)$ est donné par ses composantes covariantes $X_i(M)$, on obtient :

$$\partial_\alpha \mathbf{X} = \partial_\alpha (X_\beta \mathbf{a}^\beta + X^3 \mathbf{n}) = (\partial_\alpha X_\beta - X_\gamma \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma - X^3 b_{\alpha\beta}) \mathbf{a}^\beta + (X_\gamma b_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha X^3) \mathbf{n}$$

11. Beaucoup d'auteurs les appellent néanmoins aussi coefficients de Christoffel.

2.9 Système de coordonnées spatial induit par la surface

La base naturelle $\{\mathbf{a}_\alpha\}$ d'une surface, complétée de sa normale unitaire \mathbf{n} constitue une base de l'espace \mathcal{E}_3 . Un point N de \mathcal{E}_3 peut être repéré par les 3 paramètres (x^1, x^2, x^3) en posant

$$\mathbf{ON} = \mathbf{OM} + x^3 \mathbf{n}$$

x^3 est la distance de N à la surface. On définit ainsi un système de coordonnées de \mathcal{E}_3 induit par la surface \mathcal{S} .

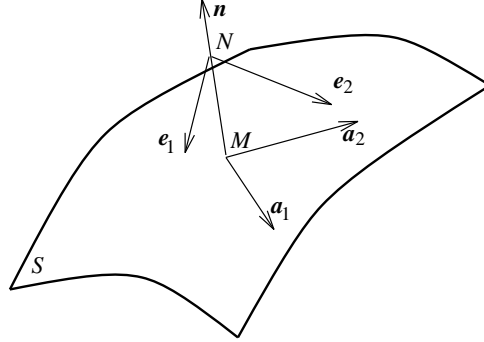


FIG. 2.4 – Système de coordonnées spatial induit

La base naturelle du système de coordonnées induit est $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{ON}$. Les deux premiers vecteurs sont :

$$\mathbf{e}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{ON} = \partial_\alpha (\mathbf{OM} + x^3 \mathbf{n}) = \mathbf{a}_\alpha + x^3 \partial_\alpha \mathbf{n}$$

$\begin{aligned} \mathbf{e}_\alpha &= \mathbf{a}_\alpha - x^3 b^\gamma{}_\alpha \mathbf{a}_\gamma = \mathbf{a}_\alpha - x^3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{a}_\alpha = (\mathbf{A} - x^3 \mathbf{B}) \otimes \mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{n} \end{aligned}$

Le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est donc parallèle à Π , et on a : $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$.

La base duale \mathbf{e}^i est définie par

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i$$

On laisse le soin au lecteur de montrer que

$$\mathbf{e}^\alpha = (\mathbf{A} - x^3 \mathbf{B})^{-1} \otimes \mathbf{a}^\alpha$$

Il est facile de voir que $\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$, et que \mathbf{e}^1 et \mathbf{e}^2 sont dans la parallèles à Π .

Si \mathbf{X} est un vecteur de \mathcal{E}_3 , on a :

$$\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{e}_\alpha + X^3 \mathbf{n} = X_\alpha \mathbf{e}^\alpha + X_3 \mathbf{n} \Rightarrow \boxed{X^3 = X_3}$$

2.9.1 Relation entre la métrique d'espace et la métrique de surface

Soit \mathbf{G} le tenseur métrique d'espace. Ses composantes deux fois covariantes sur la base naturelle du système de coordonnées spatiales induit sont :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = a_{\alpha\beta} - 2x^3 b_{\alpha\beta} + (x^3)^2 b_{\beta\gamma} b^\gamma{}_\alpha \\ g_{\alpha 3} &= \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0 \\ g_{33} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\mathbf{G} = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

On a évidemment

$$\text{Tg}(\mathbf{G}) = \mathbf{A}$$

De plus, on a

$$g = \det [g_{ij}] = \det [g_{\alpha\beta}]$$

où g_{ij} sont les composantes covariantes de \mathbf{G} sur la base naturelle induite.

Le lecteur pourra vérifier que la relation entre g et a est :

$$g = a \left\{ 1 - 2x^3 \text{Tr} \mathbf{B} + (x^3)^2 [(\text{Tr} \mathbf{B})^2 + 2 \det \mathbf{B}] - 2(x^3)^3 \text{Tr} \mathbf{B} \det \mathbf{B} + (x^3)^4 (\det \mathbf{B})^2 \right\}$$

où $\text{Tr} \mathbf{B} = b^\alpha_\alpha$ (la courbure moyenne) et $\det \mathbf{B} = \det [b^\bullet_\bullet]$ (la courbure gaussienne).

Les composantes e_{ijk} du tenseur d'orientation sur la base naturelle du système de coordonnées induit valent \sqrt{g} , $-\sqrt{g}$ ou 0 selon les indices, et les e^{ijk} valent $\frac{1}{\sqrt{g}}$, $-\frac{1}{\sqrt{g}}$ ou 0 selon les indices.

2.9.2 Relation entre les Γ_{ij}^k et les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$

En calculant les composantes des dérivées des vecteurs \mathbf{e}_i sur la base $\{\mathbf{e}_i\}$, le lecteur pourra montrer que¹²:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma - x^3 \left[(\mathbf{A} - x^3 \mathbf{B})^{-1} \bar{\otimes} \overline{\text{grad} \mathbf{B}} \right]^\gamma_{\alpha\beta} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^3 &= \left[(\mathbf{A} - x^3 \mathbf{B}) \bar{\otimes} \mathbf{B} \right]_{\alpha\beta} \\ \Gamma_{3\alpha}^\beta &= - \left[\mathbf{B} \bar{\otimes} (\mathbf{A} - x^3 \mathbf{B})^{-1} \right]^\beta_\alpha \\ \Gamma_{3\alpha}^3 &= 0 \\ \Gamma_{33}^i &= 0 \end{aligned}$$

Remarque

On pourra montrer en se plaçant dans une base orthonormée principale de \mathbf{B} que

$$(\mathbf{A} - x^3 \mathbf{B})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^3)^n \mathbf{B}^n = \mathbf{A} + x^3 \mathbf{B} + \sum_{n=2}^{\infty} (x^3)^n \mathbf{B}^n$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma - x^3 [\overline{\text{grad} \mathbf{B}}]^\gamma_{\alpha\beta} - (x^3)^2 [\mathbf{B} \bar{\otimes} \overline{\text{grad} \mathbf{B}}]^\gamma_{\alpha\beta} - \sum_{n=3}^{\infty} (x^3)^n [\mathbf{B}^{n-1} \bar{\otimes} \overline{\text{grad} \mathbf{B}}]^\gamma_{\alpha\beta} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^3 &= b_{\alpha\beta} - x^3 (\mathbf{B}^2)_{\alpha\beta} \\ \Gamma_{3\alpha}^\beta &= -b^\beta_\alpha - x^3 [\mathbf{B}^2]^\beta_\alpha - (x^3)^2 [\mathbf{B}^3]^\beta_\alpha - \sum_{n=3}^{\infty} (x^3)^n [\mathbf{B}^{n+1}]^\beta_\alpha \\ \Gamma_{3\alpha}^3 &= 0 \\ \Gamma_{33}^i &= 0 \end{aligned}$$

¹². Dans ce paragraphe, pour des raisons de concision, il est fait allusion au gradient de surface d'un tenseur du second ordre, qui sera défini dans les sections suivantes.

Dans les théories linéarisées (coques minces), on négligera souvent les termes en $(x^3)^2$ et les suivants.

2.10 Le trièdre de Darboux-Ribeaucourt

Dans la suite, on aura souvent à considérer des courbes \mathcal{C} tracées sur la surface \mathcal{S} . En chaque point M de \mathcal{C} , on peut définir un trièdre orthonormé, appelé *trièdre de Darboux-Ribeaucourt*, défini comme suit :

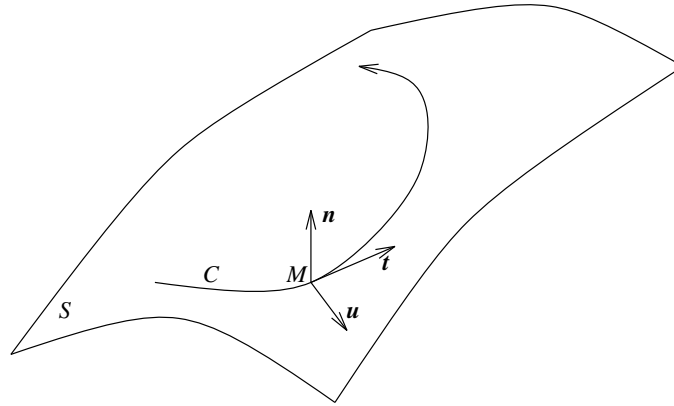


FIG. 2.5 – Trièdre de Darboux-Ribeaucourt

\mathbf{t} est le vecteur unitaire tangent en M à \mathcal{C} (et donc tangent à \mathcal{S})
 \mathbf{n} est la normale unitaire en M à \mathcal{S} (et donc normale à \mathcal{C})
 \mathbf{u} est le vecteur $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ (\mathbf{u} est donc tangent à \mathcal{S} et normal à \mathcal{C}).

Le trièdre $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{u})$ est donc orthonormé direct. Sa définition est liée à la fois aux propriétés de \mathcal{C} et à celles de \mathcal{S} .

Si la courbe \mathcal{C} est fermée, on choisit conventionnellement son orientation \mathbf{t} pour que le vecteur unitaire \mathbf{u} soit sortant de la portion de \mathcal{S} entourée par \mathcal{C} .

2.11 Étude des champs scalaires surfaciques

Soit \mathcal{S} une surface paramétrée par le couple (x^1, x^2) . On appelle *champ scalaire surfacique* une application f de \mathcal{D} dans \mathbb{R} .

$$(x^1, x^2) \in \mathcal{D} \rightarrow f(x^1, x^2) \in \mathbb{R}$$

On peut aussi bien écrire :

$$M \in \mathcal{S} \rightarrow f(M) \in \mathbb{R}$$

Si f est différentiable sur \mathcal{S} , il existe un opérateur linéaire tangent noté $\overline{\mathbf{grad}}f$ tel que :

$$df = \overline{\mathbf{grad}}f \otimes dM$$

$\overline{\mathbf{grad}}f$ est une application linéaire de Π dans \mathbb{R} , c'est donc un tenseur du premier ordre, c'est à dire un vecteur. Or,

$$df = \partial_\alpha f dx^\alpha \text{ et } dM = \mathbf{a}_\alpha dx^\alpha$$

On en déduit les composantes covariantes de $\overline{\text{grad}}f$:

$$\boxed{(\overline{\text{grad}}f)_\alpha = \partial_\alpha f \Leftrightarrow \overline{\text{grad}}f = \partial_\alpha f \mathbf{a}^\alpha}$$

L'opérateur $\overline{\text{grad}}f$ est un vecteur tangent à \mathcal{S} en M . Il a toutes les propriétés algébriques habituelles du gradient d'une fonction scalaire.

Relation avec le gradient spatial

Considérons le champ spatial f défini par

$$N = M + x^3 \mathbf{n} \rightarrow f(x^1, x^2) \in \mathbb{R}$$

f est un prolongement du champ surfacique, constant en x^3 .

On montre facilement que

$$\begin{aligned} \text{grad}f &= \overline{\text{grad}}f \otimes (\mathbf{A} - x^3 \mathbf{B})^{-1} \\ &= \overline{\text{grad}}f + x^3 \mathbf{B} \otimes \overline{\text{grad}}f + (x^3)^2 \mathbf{B}^2 \otimes \overline{\text{grad}}f + \sum_{n=3}^{\infty} (x^3)^n \mathbf{B}^n \otimes \overline{\text{grad}}f \end{aligned}$$

2.12 Étude des champs vectoriels surfaciques tangents

Soit \mathcal{S} une surface paramétrée par le couple (x^1, x^2) . On appelle *champ vectoriel surfacique tangent* une application de \mathcal{D} dans Π .

$$(x^1, x^2) \in \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{V}(x^1, x^2) \in \Pi$$

On peut aussi bien écrire :

$$M \in \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{V}(M) \in \Pi$$

2.12.1 Gradient de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent

Si $\mathbf{V}(M)$ est différentiable, il existe un opérateur linéaire noté \mathbf{GV} tel que :

$$d\mathbf{V} = \mathbf{GV} \otimes dM$$

Mais $d\mathbf{V}$ n'est pas un vecteur de Π . En effet,

$$\begin{aligned} d\mathbf{V} &= d(V^\alpha \mathbf{a}_\alpha) \\ &= dV^\alpha \mathbf{a}_\alpha + V^\alpha d\mathbf{a}_\alpha \\ &= \partial_\beta V^\alpha dx^\beta \mathbf{a}_\alpha + V^\alpha \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha dx^\beta \\ &= \left(\partial_\beta V^\alpha \mathbf{a}_\alpha + V^\alpha \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}^\mu \mathbf{a}_\mu + V^\alpha b_{\beta\alpha} \mathbf{n} \right) dx^\beta \end{aligned}$$

L'opérateur \mathbf{GV} est une application de Π dans \mathcal{E}_3 . Ce n'est donc pas un tenseur de surface.

Si maintenant on considère la partie tangente de $d\mathbf{V}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Tg}(d\mathbf{V}) &= \text{Tg}(\mathbf{GV} \otimes dM) \\ &= \left(\partial_\beta V^\alpha \mathbf{a}_\alpha + V^\alpha \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}^\mu \mathbf{a}_\mu \right) dx^\beta \\ &= \left(\partial_\beta V^\alpha \mathbf{a}_\alpha + V^\mu \overline{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha \mathbf{a}_\alpha \right) dx^\beta \\ &= \left(\partial_\beta V^\alpha + V^\mu \overline{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha \right) dx^\beta \mathbf{a}_\alpha \end{aligned}$$

L'opérateur linéaire qui à tout $d\mathbf{M}$ associe $\text{Tg}(d\mathbf{V})$ est un endomorphisme de Π . Le tenseur du second ordre de surface qui lui est associé est appelé *gradient de surface* et on le note $\overline{\text{grad}}\mathbf{V}$ ¹³.

$$\boxed{\text{Tg}(d\mathbf{V}) = \overline{\text{grad}}\mathbf{V} \otimes d\mathbf{M}}$$

Le gradient de surface, appliqué à $d\mathbf{M}$, donne la *partie tangente* de la différentielle d'un champ de vecteurs tangents.

Ses composantes sont¹⁴ :

$$(\overline{\text{grad}}\mathbf{V})^\alpha{}_\beta = \partial_\beta V^\alpha + V^\mu \overline{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha \Leftrightarrow \overline{\text{grad}}\mathbf{V} = \left(\partial_\beta V^\alpha + V^\mu \overline{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha \right) \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta$$

Le lecteur établira facilement que si \mathbf{V} est exprimé dans la base duale, on obtient les composantes complètement covariantes de $\overline{\text{grad}}\mathbf{V}$:

$$(\overline{\text{grad}}\mathbf{V})_{\alpha\beta} = \partial_\beta V_\alpha - V_\mu \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}^\mu \Leftrightarrow \overline{\text{grad}}\mathbf{V} = \left(\partial_\beta V_\alpha - V_\mu \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}^\mu \right) \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta$$

La différentielle complète du champ tangent \mathbf{V} est donc :

$$\boxed{d\mathbf{V} = \underbrace{\overline{\text{grad}}\mathbf{V} \otimes d\mathbf{M}}_{\text{partie tangente}} + \underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{V}, d\mathbf{M}) \mathbf{n}}_{\text{partie normale}} = \overline{\text{grad}}\mathbf{V} \otimes d\mathbf{M} + (\mathbf{V} \otimes \mathbf{B} \otimes d\mathbf{M}) \mathbf{n}}$$

Les dérivées d'un champ surfacique de vecteurs *non tangents* \mathbf{X} défini sur \mathcal{S} sont :

$$\partial_\alpha \mathbf{X} = \underbrace{(\overline{\text{grad}}\text{Tg}(\mathbf{X}) - X^3 \mathbf{B}) \otimes \mathbf{a}_\alpha}_{\text{partie tangente}} + \underbrace{[(\mathbf{B} \otimes \text{Tg}(\mathbf{X}) + \overline{\text{grad}}X^3) \otimes \mathbf{a}_\alpha]}_{\text{partie normale}} \mathbf{n}$$

Relation avec le gradient spatial

Considérons le champ spatial vectoriel \mathbf{V} défini par

$$N = M + x^3 \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{V}(x^1, x^2) \in \mathbb{R}$$

\mathbf{V} est un prolongement du champ surfacique, constant en x^3 .

On montre après un calcul assez long que

$$\overline{\text{grad}}\mathbf{V} = [\overline{\text{grad}}\text{Tg}(\mathbf{V}) - V^3 \mathbf{B} + \mathbf{n} \otimes \overline{\text{grad}}V^3 + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{B} \otimes \text{Tg}(\mathbf{V}))] \otimes (\mathbf{A} - x^3 \mathbf{B})^{-1}$$

où

$$(\mathbf{A} - x^3 \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A} + x^3 \mathbf{B} + (x^3)^2 \mathbf{B}^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (x^3)^n \mathbf{B}^n$$

2.12.2 Divergence de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent

La divergence de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent est le *scalaire* défini par :

$$\boxed{\overline{\text{div}}\mathbf{V} = \overline{\text{grad}}\mathbf{V} \otimes \mathbf{A} = \text{Tr} \overline{\text{grad}}\mathbf{V}}$$

En fonction des composantes de \mathbf{V} , on obtient :

$$\overline{\text{div}}\mathbf{V} = (\overline{\text{grad}}\mathbf{V})^\alpha{}_\alpha = \partial_\alpha V^\alpha + V^\mu \overline{\Gamma}_{\alpha\mu}^\alpha$$

13. Beaucoup d'auteurs le notent $\nabla\mathbf{V}$. On l'appelle aussi souvent *dérivée de Levy-Civita*.

14. Les auteurs qui utilisent la notation $\nabla\mathbf{V}$ posent $\nabla_\beta V^\alpha = \partial_\beta V^\alpha + V^\mu \overline{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha$. Le tenseur $\nabla\mathbf{V}$ est donc le transposé de $\overline{\text{grad}}\mathbf{V}$, et on a $d\mathbf{V} = d\mathbf{M} \otimes \nabla\mathbf{V}$

2.12.3 Rotationnel de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent

Le rotationnel de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent est le *scalaire* défini par :

$$\boxed{\overline{\text{rot}}\mathbf{V} = -\overline{\text{grad}}\mathbf{V} \otimes \overline{\mathbf{E}}}$$

En fonction des composantes de \mathbf{V} , on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{\text{rot}}\mathbf{V} &= -(\overline{\text{grad}}\mathbf{V})_{\alpha\beta} \overline{e}^{\alpha\beta} \\ \overline{\text{rot}}\mathbf{V} &= -\left(\partial_\beta V_\alpha - V_\mu \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}^\mu\right) \overline{e}^{\alpha\beta} \\ \overline{\text{rot}}\mathbf{V} &= \overline{e}^{\beta\alpha} \partial_\beta V_\alpha \\ \overline{\text{rot}}\mathbf{V} &= \frac{1}{\sqrt{a}} (\partial_1 V_2 - \partial_2 V_1)\end{aligned}$$

Relation avec le rotationnel classique

Considérons un champ vectoriel spatial $\mathbf{X}(N)$ tel que sa restriction à \mathcal{S} soit un champ vectoriel tangent \mathbf{V} .

$$\mathbf{X}(x^1, x^2, 0) = \mathbf{V}(x^1, x^2) \in \Pi$$

On dit aussi que le champ \mathbf{X} est un prolongement du champ \mathbf{V} . Le rotationnel (classique) de \mathbf{X} est

$$\mathbf{rot}\mathbf{X} = e^{ijk} \partial_i X_j \mathbf{e}_k$$

Sur la surface \mathcal{S} , $\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$, la valeur du rotationnel de \mathbf{X} est:

$$\begin{aligned}[\mathbf{rot}\mathbf{X}]_{(x^3=0)} &= e_{(x^3=0)}^{ijk} [\partial_i X_j]_{(x^3=0)} \mathbf{a}_k \\ &= e_{(x^3=0)}^{3\alpha\beta} [\partial_3 X_\alpha]_{(x^3=0)} \mathbf{a}_\beta + e_{(x^3=0)}^{\alpha jk} [\partial_\alpha X_j]_{(x^3=0)} \mathbf{a}_k \\ &= e_{(x^3=0)}^{3\alpha\beta} [\partial_3 X_\alpha]_{(x^3=0)} \mathbf{a}_\beta + e_{(x^3=0)}^{\alpha 3\beta} [\partial_\alpha X_3]_{(x^3=0)} \mathbf{a}_\beta + e_{(x^3=0)}^{\alpha\beta 3} [\partial_\alpha X_\beta]_{(x^3=0)} \mathbf{a}_3 \\ &= \overline{e}^{\alpha\beta} [\partial_3 X_\alpha]_{(x^3=0)} \mathbf{a}_\beta - \overline{e}^{\alpha\beta} [\partial_\alpha X_3]_{(x^3=0)} \mathbf{a}_\beta + \overline{e}^{\alpha\beta} [\partial_\alpha X_\beta]_{(x^3=0)} \mathbf{n} \\ &= \overline{e}^{\alpha\beta} \left([\partial_3 X_\alpha]_{(x^3=0)} - [\partial_\alpha X_3]_{(x^3=0)} \right) \mathbf{a}_\beta + \overline{\text{rot}}\mathbf{V} \mathbf{n}\end{aligned}$$

Le rotationnel de surface est la composante normale du rotationnel classique.

$$\boxed{\overline{\text{rot}}\mathbf{V} = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{rot}\mathbf{X}]_{(x^3=0)}}$$

Propriété

Considérons un champ surfacique tangent $\mathbf{V}(M)$ et le champ surfacique $\mathbf{W}(M)$ défini par

$$\mathbf{W}(M) = \mathbf{n} \wedge \mathbf{V}(M)$$

Le champ \mathbf{W} est un champ surfacique tangent orthogonal à \mathbf{V} . Il se déduit de \mathbf{V} par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de \mathbf{n} . Le lecteur montrera facilement en calculant le rotationnel de surface de \mathbf{W} qu'on obtient :

$$\boxed{\overline{\text{rot}}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{V}) = \overline{\text{div}}\mathbf{V}}$$

2.12.4 Formule de Stokes pour les champs vectoriels surfaciques tangents

La formule de Stokes pour les champs vectoriels surfaciques tangents se déduit immédiatement de la formule de Stokes classique.

Soit $\mathbf{V}(M)$ un champ vectoriel surfacique tangent défini sur \mathcal{S} , et soit $\mathbf{X}(N)$ un prolongement de $\mathbf{V}(M)$ dans \mathcal{E}_3 .

Considérons une courbe \mathcal{C}_0 fermée de \mathcal{S} , entourant la portion de surface \mathcal{S}_0 . La formule de Stokes classique pour le champ \mathbf{X} est :

$$\int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{X} \, ds = \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{X} \cdot \mathbf{t} \, dl$$

On en déduit immédiatement que pour $x^3 = 0$, on a :

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}_0} \overline{\text{rot}} \mathbf{V} \, ds = \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, dl}$$

soit en termes de composantes :

$$\int_{\mathcal{S}_0} \bar{e}^{\alpha\beta} \partial_\alpha V_\beta \, ds = \int_{\mathcal{C}_0} V^\alpha t_\alpha \, dl$$

L'intégrale du rotationnel de surface de \mathbf{V} sur \mathcal{S}_0 est égale à la circulation de \mathbf{V} sur \mathcal{C}_0 .

2.12.5 Formule de la divergence pour les champs vectoriels surfaciques tangents

Considérons un champ surfacique tangent $\mathbf{V}(M)$ et le champ surfacique $\mathbf{W}(M)$ défini par

$$\mathbf{W}(M) = \mathbf{n} \wedge \mathbf{V}(M)$$

Le champ \mathbf{W} est un champ surfacique tangent qui se déduit de \mathbf{V} par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de \mathbf{n} .

Considérons une courbe \mathcal{C}_0 fermée de \mathcal{S} , entourant la portion de surface \mathcal{S}_0 .

En appliquant la formule de Stokes précédente au champ \mathbf{W} on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_0} \overline{\text{rot}} \mathbf{W} \, ds &= \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{W} \cdot \mathbf{t} \, dl \\ \int_{\mathcal{S}_0} \overline{\text{rot}} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{V}) \, ds &= \int_{\mathcal{C}_0} (\mathbf{n}, \mathbf{V}, \mathbf{t}) \, dl \\ \int_{\mathcal{S}_0} \overline{\text{div}} \mathbf{V} \, ds &= \int_{\mathcal{C}_0} (\mathbf{V}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) \, dl \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}_0} \overline{\text{div}} \mathbf{V} \, ds = \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{V} \cdot \mathbf{u} \, dl}$$

soit en termes de composantes :

$$\int_{\mathcal{S}_0} \left(\partial_\alpha V^\alpha + V^\mu \bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^\alpha \right) ds = \int_{\mathcal{C}_0} V^\alpha u_\alpha \, dl$$

L'intégrale de la divergence de surface de \mathbf{V} sur \mathcal{S}_0 est égale au flux sortant de \mathbf{V} à travers \mathcal{C}_0 .

2.13 Étude des champs tensoriels surfaciques tangents

On se limite ici aux champs tensoriels surfaciques tangents du second ordre.

Soit \mathcal{S} une surface paramétrée par le couple (x^1, x^2) . On appelle *champ tensoriel surfacique tangent* du second ordre une application de \mathcal{D} dans $\Pi \otimes \Pi$.

$$(x^1, x^2) \in \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{T}(x^1, x^2) \in \Pi \otimes \Pi$$

On peut aussi bien écrire :

$$M \in \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{T}(M) \in \Pi \otimes \Pi$$

2.13.1 Gradient de surface d'un champ tensoriel surfacique tangent du second ordre

Comme pour les champs vectoriels surfaciques tangents, la différentielle d'un champ tensoriel surfacique tangent n'est pas un champ tensoriel tangent. En effet,

$$d\mathbf{T} = d(T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta) = dT^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta + T^{\alpha\beta} d\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta + T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes d\mathbf{a}_\beta$$

Les différentielles des vecteurs de la base naturelle ayant des composantes normales, la différentielle $d\mathbf{T}$ contient des termes en $\mathbf{n} \otimes \mathbf{a}_\beta$ et $\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{n}$.

On note $\text{Tg}(d\mathbf{T})$ la partie tangente de $d\mathbf{T}$. L'opérateur

$$dM \rightarrow \text{Tg}(d\mathbf{T})$$

est une application linéaire de Π dans $\Pi \otimes \Pi$. Il définit un tenseur de surface du troisième ordre appelé *gradient de surface* et noté $\overline{\text{grad}}\mathbf{T}$:

$$\boxed{\text{Tg}(d\mathbf{T}) = \overline{\text{grad}}\mathbf{T} \overline{\otimes} dM}$$

En calculant la différentielle de \mathbf{T} , le lecteur établira facilement les composantes :

$$\begin{aligned} (\overline{\text{grad}}\mathbf{T})^{\alpha\beta}{}_\gamma &= \partial_\gamma T^{\alpha\beta} + T^{\mu\beta} \overline{\Gamma}_{\gamma\mu}^\alpha + T^{\alpha\mu} \overline{\Gamma}_{\gamma\mu}^\beta \\ (\overline{\text{grad}}\mathbf{T})^{\alpha}{}_{\beta\gamma} &= \partial_\gamma T^{\alpha}{}_\beta + T^{\mu}{}_\beta \overline{\Gamma}_{\gamma\mu}^\alpha - T^{\alpha}{}_\mu \overline{\Gamma}_{\gamma\beta}^\mu \\ (\overline{\text{grad}}\mathbf{T})^{\beta}{}_{\alpha\gamma} &= \partial_\gamma T_{\alpha}{}^\beta - T_{\mu}{}^\beta \overline{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\mu + T_{\alpha}{}^\mu \overline{\Gamma}_{\gamma\mu}^\beta \\ (\overline{\text{grad}}\mathbf{T})_{\alpha\beta\gamma} &= \partial_\gamma T_{\alpha\beta} - T_{\mu\beta} \overline{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\mu - T_{\alpha\mu} \overline{\Gamma}_{\gamma\beta}^\mu \end{aligned}$$

On voit que la construction des formules des composantes du gradient de surface est la même que pour le gradient classique d'un champ spatial¹⁵. La seule différence est que les indices varient de 1 à 2.

On étendra sans difficulté aux gradients de surface de tenseurs de surface d'ordre supérieur à 2.

On laisse le soin au lecteur de vérifier deux propriétés importantes suivantes :

$$\boxed{\overline{\text{grad}}\mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ et } \overline{\text{grad}}\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{0}}$$

15. Voir le cours de mécanique des milieux continus.

2.13.2 Divergence de surface d'un champ tensoriel surfacique tangent du second ordre

On appelle *divergence de surface d'un champ tensoriel surfacique tangent du second ordre* le vecteur de Π défini par

$$\boxed{\overline{\text{div}}\mathbf{T} = \overline{\text{grad}}\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{A}}$$

soit en termes de composantes :

$$\begin{aligned} (\overline{\text{div}}\mathbf{T})^\alpha &= (\overline{\text{grad}}\mathbf{T})^{\alpha\gamma}{}_\gamma = \partial_\gamma T^{\alpha\gamma} + T^{\mu\gamma} \overline{\Gamma}_{\gamma\mu}^\alpha + T^{\alpha\mu} \overline{\Gamma}_{\gamma\mu}^\gamma \\ (\overline{\text{div}}\mathbf{T})_\alpha &= (\overline{\text{grad}}\mathbf{T})_{\alpha\gamma}{}^\gamma = \partial_\gamma T_{\alpha\gamma} - T_\mu{}^\gamma \overline{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\mu + T_{\alpha\mu} \overline{\Gamma}_{\gamma\mu}^\gamma \end{aligned}$$

Cette définition s'étend aux tenseurs d'ordre supérieur.

2.13.3 Formule de la divergence pour les champs tensoriels surfaciques tangents du second ordre

Considérons une courbe fermée \mathcal{C}_0 de \mathcal{S} entourant la portion \mathcal{S}_0 . On choisit l'orientation de \mathcal{C}_0 de telle manière que le vecteur \mathbf{u} du trièdre de Darboux-Ribeaucourt $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{u})$ soit sortant de \mathcal{S}_0 .

On se propose de calculer l'intégrale vectorielle :

$$\int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl = \int_{\mathcal{C}_0} T^{\alpha\beta} u_\beta \mathbf{a}_\alpha \, dl$$

Pour la calculer, on considère une base orthonormée fixe $\{\mathbf{e}_i\}$, et on projette cette intégrale vectorielle sur la base en trois intégrales scalaires :

$$\mathbf{e}_i \cdot \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl = \int_{\mathcal{C}_0} T^{\alpha\beta} u_\beta \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_\alpha \, dl = \int_{\mathcal{C}_0} [T^{\alpha\beta} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_\alpha] u_\beta \, dl$$

Pour i fixé, les deux nombres $W^\beta = T^{\alpha\beta} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_\alpha$ peuvent être considérés comme les composantes d'un champ vectoriel tangent \mathbf{W} . Les trois intégrales scalaires s'écrivent :

$$\mathbf{e}_i \cdot \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl = \int_{\mathcal{C}_0} W^\beta u_\beta \, dl = \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} \, dl$$

On peut alors utiliser la formule de la divergence pour les champs vectoriels surfaciques tangents :

$$\mathbf{e}_i \cdot \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl = \int_{\mathcal{S}_0} \overline{\text{div}}\mathbf{W} \, ds = \int_{\mathcal{S}_0} \left(\partial_\beta W^\beta + W^\mu \overline{\Gamma}_{\beta\mu}^\beta \right) ds$$

En remplaçant W^β par sa valeur et en développant la dérivée, on trouve :

$$\mathbf{e}_i \cdot \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl = \int_{\mathcal{S}_0} \left[\partial_\beta T^{\alpha\beta} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_\alpha + T^{\mu\beta} \mathbf{e}_i \cdot \left(\overline{\Gamma}_{\beta\mu}^\gamma \mathbf{a}_\gamma + b_{\beta\mu} \mathbf{n} \right) \right] ds = \mathbf{e}_i \cdot \int_{\mathcal{S}_0} \left(\overline{\text{div}}\mathbf{T} + \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{T} \mathbf{n} \right) ds$$

On en déduit la formule de la divergence pour les champs tensoriels surfaciques tangents :

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}_0} \left(\overline{\text{div}}\mathbf{T} + \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{T} \mathbf{n} \right) ds = \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl}$$

soit en termes de composantes :

$$\int_{\mathcal{S}_0} \left[\left(\partial_\beta T^{\alpha\beta} + T^{\mu\beta} \overline{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha + T^{\alpha\mu} \overline{\Gamma}_{\beta\mu}^\beta \right) \mathbf{a}_\alpha + T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \mathbf{n} \right] ds = \int_{\mathcal{C}_0} T^{\alpha\beta} u_\beta \mathbf{a}_\alpha$$

Alors que pour les champs vectoriels surfaciques tangents, la formule de la divergence était formellement la même que la formule classique, on voit apparaître ici, pour les tenseurs du second ordre, un terme nouveau dû à la courbure.

2.14 Définition d'une coque

Une coque est un milieu continu solide déformable dont la forme peut être assimilée à une surface avec une épaisseur.

Soit une surface \mathcal{S} paramétrée par les deux paramètres (x^1, x^2) . Une coque d'épaisseur h est l'ensemble des points N tels que

$$\left\{ N \text{ tels que } \mathbf{ON} = \mathbf{OM} + x^3 \mathbf{n}, x^3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], \frac{h}{2} < \text{Inf}(\|R_1\|, \|R_2\|) \right\}$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux de la surface \mathcal{S} en M .

La coque est dite *mince* si $h \ll \text{Inf}(\|R_1\|, \|R_2\|)$, en abrégé on écrira $h \ll R$.

Chaque fois qu'on considère la coque comme un milieu surfacique, on la confond avec sa surface moyenne \mathcal{S} et son point courant est $M(x^1, x^2)$. La base naturelle est $\{\mathbf{a}_\alpha\}$.

Chaque fois qu'on la considère comme un milieu volumique, on lui donne sa troisième dimension et son point courant est $N(x^1, x^2, x^3)$. La base naturelle est celle du système de coordonnées spatial induit $\{\mathbf{e}_i\}$.

Chapitre 3

Déformations dans les coques

L'étude des déformations dans les coques va se dérouler en deux temps. On commence par étudier la déformation de la surface moyenne. Elle conduit à la notion de tenseur de déformation de surface et (seulement sous certaines conditions) à la notion de tenseur de variation de courbure. On tente ensuite de relier ces deux tenseurs au tenseur de déformation de la coque considérée comme un milieu tridimensionnel. On verra que cette relation n'est simple qu'au prix de certaines hypothèses.

3.1 Déformation de la surface moyenne

Soit une coque dont la surface moyenne est \mathcal{S} . On suppose que cette surface moyenne est soumise à un champ de déplacement $\bar{\xi}(x^1, x^2) = \bar{\xi}(M)$. En général, $\bar{\xi}$ n'est pas un vecteur tangent, c'est donc un champ surfacique vectoriel à valeurs dans \mathcal{E}_3 .

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \bar{\xi}^3 \mathbf{n} = \text{Tg}(\bar{\xi}) + \bar{\xi}^3 \mathbf{n}$$

Le point $M' = M + \bar{\xi}(M)$ est un point de la surface déformée \mathcal{S}' . Cette surface est naturellement paramétrée par les deux paramètres (x^1, x^2) .

$$M' = M(x^1, x^2) + \bar{\xi}(x^1, x^2)$$

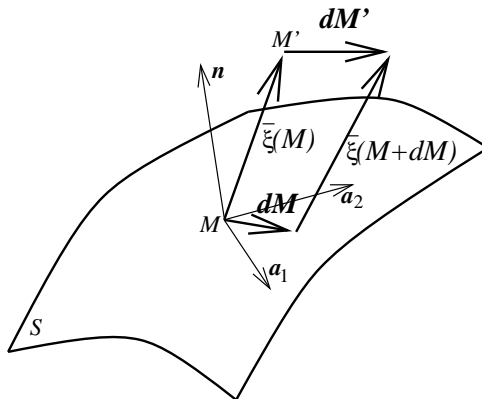


FIG. 3.1 – Champ de déplacement de la surface moyenne

On va donc étudier les propriétés de \mathcal{S}' .

3.1.1 Base naturelle de \mathcal{S}'

\mathcal{S}' étant paramétrée par (x^1, x^2) , la base naturelle est

$$\mathbf{a}'_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{O}M' = \partial_\alpha \mathbf{O}M + \partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{a}_\alpha + \partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}}$$

où

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}} &= \left(\partial_\alpha \bar{\xi}^\beta + \bar{\xi}^\mu \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\beta - \bar{\xi}^3 b_{\alpha\beta} \right) \mathbf{a}_\beta + \left(\bar{\xi}^\gamma b_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha \bar{\xi}^3 \right) \mathbf{n} \\ &= \left[\overline{\text{grad}} \text{Tg}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) - \bar{\xi}^3 \mathbf{B} \right] \otimes \mathbf{a}_\alpha + \left[\text{Tg}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{a}_\alpha + \partial_\alpha \bar{\xi}^3 \right] \mathbf{n} \end{aligned}$$

3.1.2 Tenseur métrique de surface de \mathcal{S}'

Par définition, les composantes du tenseur métrique \mathbf{A}' de \mathcal{S}' sur la base $\{\mathbf{a}'_\alpha\}$ sont :

$$a'_{\alpha\beta} = \mathbf{a}'_\alpha \cdot \mathbf{a}'_\beta = (\mathbf{a}_\alpha + \partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}}) \cdot (\mathbf{a}_\beta + \partial_\beta \bar{\boldsymbol{\xi}}) = a_{\alpha\beta} + \mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \bar{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{a}_\beta \cdot \partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}} + \partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}} \cdot \partial_\beta \bar{\boldsymbol{\xi}}$$

3.1.3 Tenseur de déformation de surface

De même qu'en mécanique des milieux continus volumiques, on va s'intéresser aux variations de longueur autour de M lorsque la surface \mathcal{S} subit le champ de déplacements $\bar{\boldsymbol{\xi}}$.

Soit M un point de \mathcal{S} . On considère un point voisin $M + d\mathbf{M}$ où $d\mathbf{M} = dx^\alpha \mathbf{a}_\alpha$ est dû à une variation arbitraire des deux paramètres dx^α .

Sur la surface \mathcal{S} , l'élément de longueur est donné par :

$$dl^2 = d\mathbf{M} \cdot d\mathbf{M} = \mathbf{A}(d\mathbf{M}, d\mathbf{M}) = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Lorsqu'on applique le champ de déplacement $\bar{\boldsymbol{\xi}}$, le vecteur $d\mathbf{M}$ devient $d\mathbf{M}'$. Puisque la surface \mathcal{S}' est paramétrée par les mêmes paramètres (x^1, x^2) , on a $d\mathbf{M}' = dx^\alpha \mathbf{a}'_\alpha$ et l'élément de longueur est donné par :

$$dl'^2 = d\mathbf{M}' \cdot d\mathbf{M}' = \mathbf{A}'(d\mathbf{M}', d\mathbf{M}') = a'_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

La variation du carré des éléments de longueur due au champ de déplacement $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ est donc :

$$dl'^2 - dl^2 = (a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\beta$$

Pour un champ de déplacements $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ donné, on pose

$$\boxed{dl'^2 - dl^2 = 2 \bar{\mathbf{L}}(d\mathbf{M}, d\mathbf{M})}$$

$\bar{\mathbf{L}}$ est une application linéaire de $\Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, c'est à dire un tenseur de surface de \mathcal{S} du second ordre. Il est appelé *tenseur de déformation de surface* dû au déplacement $\bar{\boldsymbol{\xi}}$. Ses composantes covariantes sur la base naturelle duale de \mathcal{S} sont¹ :

$$\bar{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})$$

1. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, le tenseur $\bar{\mathbf{L}}$ n'est pas la différence entre les tenseurs métriques \mathbf{A}' et \mathbf{A} . Cette différence n'a aucun sens puisque ces deux tenseurs sont définis dans des espaces tangents différents. $\bar{\mathbf{L}}$ est un tenseur de surface de \mathcal{S} dont les composantes covariantes sont les nombres $\frac{1}{2} (a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta})$, les $a'_{\alpha\beta}$ étant les composantes de \mathbf{A}' sur la base $\mathbf{a}'^\alpha \otimes \mathbf{a}'^\beta$ et les $a_{\alpha\beta}$ les composantes de \mathbf{A} sur la base $\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta$.

En remplaçant les $a'_{\alpha\beta}$ par leur valeur, on obtient ces composantes en fonction de $\bar{\xi}$:

$$\boxed{\bar{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \bar{\xi} + \mathbf{a}_\beta \cdot \partial_\alpha \bar{\xi} + \partial_\alpha \bar{\xi} \cdot \partial_\beta \bar{\xi})}$$

En exprimant les dérivées de $\bar{\xi}$, le lecteur pourra montrer que l'expression tensorielle de $\bar{\mathbf{L}}$ en fonction du champ de déplacements $\bar{\xi}$ est:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}} &= \frac{1}{2} \left[\overline{\mathbf{grad} \text{Tg}(\bar{\xi})} + \overline{\mathbf{grad}^t \text{Tg}(\bar{\xi})} - 2\bar{\xi}^3 \mathbf{B} + \overline{\mathbf{grad} \text{Tg}(\bar{\xi})} \otimes \overline{\mathbf{grad}^t \text{Tg}(\bar{\xi})} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[-\bar{\xi}^3 \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{grad}^t \text{Tg}(\bar{\xi})} - \bar{\xi}^3 \overline{\mathbf{grad} \text{Tg}(\bar{\xi})} \otimes \mathbf{B} + (\bar{\xi}^3)^2 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\mathbf{B} \otimes \text{Tg}(\bar{\xi})) \otimes (\mathbf{B} \otimes \text{Tg}(\bar{\xi})) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\overline{\mathbf{grad} \xi^3} \otimes (\text{Tg}(\bar{\xi} \otimes \mathbf{B})) + (\text{Tg}(\bar{\xi} \otimes \mathbf{B})) \otimes \overline{\mathbf{grad} \xi^3} + \overline{\mathbf{grad} \xi^3} \otimes \overline{\mathbf{grad} \xi^3} \right] \end{aligned}$$

Remarques:

Les composantes dans la base naturelle de \mathcal{S}' du tenseur métrique \mathbf{A}' peuvent maintenant s'écrire :

$$a'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + 2\bar{L}_{\alpha\beta}$$

Le lecteur vérifiera qu'on a alors :

$$\boxed{a' = \det [\mathbf{A}'_{\bullet\bullet}] = a (1 + 2 \text{Tr} \bar{\mathbf{L}} + 4 \det \bar{\mathbf{L}})}$$

où $\text{Tr} \bar{\mathbf{L}}$ et $\det \bar{\mathbf{L}}$ sont respectivement la trace et le déterminant de $\bar{\mathbf{L}}$, c'est à dire la trace et le déterminant de la matrice des composantes mixtes de \mathbf{L} .

3.1.4 Tenseur des petites déformations de surface

De même qu'en mécanique des milieux continus volumiques, on suppose souvent que les déformations sont petites, c'est à dire

$$\|\partial_\alpha \bar{\xi}\| \ll 1$$

Dans la suite, on note η un nombre adimensionnel infiniment petit d'ordre 1. On écrira donc:

$$\|\partial_\alpha \bar{\xi}\| \sim \eta$$

En observant l'expression de la dérivée de $\bar{\xi}$:

$$\partial_\alpha \bar{\xi} = \left(\underbrace{\overline{\mathbf{grad} \text{Tg}(\bar{\xi})}}_{\sim \eta} - \underbrace{\bar{\xi}^3 \mathbf{B}}_{\sim \frac{\|\bar{\xi}\|}{R}} \right) \otimes \mathbf{a}_\alpha + \left[\left(\underbrace{\mathbf{B} \otimes \text{Tg}(\bar{\xi})}_{\sim \frac{\|\bar{\xi}\|}{R}} + \underbrace{\overline{\mathbf{grad} \xi^3}}_{\sim \eta} \right) \otimes \mathbf{a}_\alpha \right] \mathbf{n}$$

on voit que:

$$\boxed{\|\partial_\alpha \bar{\xi}\| \sim \eta \implies \frac{\|\bar{\xi}\|}{R} \sim \eta}$$

Autrement dit, pour que les *déformations* soient petites au premier ordre, il est nécessaire que les *déplacements* soient petits (au premier ordre) devant les courbures.

Dans les composantes covariantes de $\overline{\mathbf{L}}$, on peut alors négliger le terme $\partial_\alpha \overline{\boldsymbol{\xi}} \cdot \partial_\beta \overline{\boldsymbol{\xi}}$, qui est du second ordre.

On obtient alors le *tenseur des petites déformations de surface* $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dont les composantes covariantes sont au second ordre près :

$$\overline{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_\alpha \cdot \partial_\beta \overline{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{a}_\beta \cdot \partial_\alpha \overline{\boldsymbol{\xi}})$$

Soit encore sous forme tensorielle

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left[\overline{\mathbf{grad}} \text{Tg}(\overline{\boldsymbol{\xi}}) + \overline{\mathbf{grad}}^t \text{Tg}(\overline{\boldsymbol{\xi}}) - 2\overline{\boldsymbol{\xi}}^3 \mathbf{B} \right]$$

Le tenseur des petites déformations est une fonction linéaire de $\overline{\boldsymbol{\xi}}$.

Sous cette même hypothèse, il vient :

$$a' \simeq a(1 + 2 \text{Tr} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad \text{et} \quad \sqrt{a'} \simeq \sqrt{a}(1 + \text{Tr} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

3.1.5 Normale unitaire de \mathcal{S}'

Par définition, la normale unitaire \mathbf{n}' de \mathcal{S}' est :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' &= \frac{\mathbf{a}'_1 \wedge \mathbf{a}'_2}{\sqrt{a'}} \\ &= \frac{(\mathbf{a}_1 + \partial_1 \overline{\boldsymbol{\xi}}) \wedge (\mathbf{a}_2 + \partial_2 \overline{\boldsymbol{\xi}})}{\sqrt{a} \sqrt{1 + 2 \text{Tr} \overline{\mathbf{L}} + 4 \det \overline{\mathbf{L}}}} \\ &= \frac{\mathbf{n} \sqrt{a} + \mathbf{a}_1 \wedge \partial_2 \overline{\boldsymbol{\xi}} + \partial_1 \overline{\boldsymbol{\xi}} \wedge \mathbf{a}_2 + \partial_1 \overline{\boldsymbol{\xi}} \wedge \partial_2 \overline{\boldsymbol{\xi}}}{\sqrt{a} \sqrt{1 + 2 \text{Tr} \overline{\mathbf{L}} + 4 \det \overline{\mathbf{L}}}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} \sqrt{a} + \sqrt{a} e^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \wedge \partial_\beta \overline{\boldsymbol{\xi}} + \partial_1 \overline{\boldsymbol{\xi}} \wedge \partial_2 \overline{\boldsymbol{\xi}}}{\sqrt{a} \sqrt{1 + 2 \text{Tr} \overline{\mathbf{L}} + 4 \det \overline{\mathbf{L}}}}$$

Approximation de \mathbf{n}' en petites déformations

Si on est dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations, en négligeant les termes du second ordre, l'expression de \mathbf{n}' se simplifie :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2 \text{Tr} \overline{\mathbf{L}} + 4 \det \overline{\mathbf{L}}}} \simeq 1 - \text{Tr} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Le produit $\partial_1 \overline{\boldsymbol{\xi}} \wedge \partial_2 \overline{\boldsymbol{\xi}}$ est du second ordre,

$$\mathbf{n}' \simeq (1 - \text{Tr} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) (\mathbf{n} + e^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \wedge \partial_\beta \overline{\boldsymbol{\xi}})$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \partial_\beta \bar{\xi} &= (\mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_\beta \bar{\xi}) \mathbf{a}_\gamma + (\mathbf{n} \cdot \partial_\beta \bar{\xi}) \mathbf{n} \\
 \mathbf{a}_\alpha \wedge \partial_\beta \bar{\xi} &= (\mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_\beta \bar{\xi}) \mathbf{a}_\alpha \wedge \mathbf{a}_\gamma + (\mathbf{n} \cdot \partial_\beta \bar{\xi}) \mathbf{a}_\alpha \wedge \mathbf{n} \\
 &= (\mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_\beta \bar{\xi}) e_{\alpha\gamma} \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \partial_\beta \bar{\xi}) e_{\gamma\alpha} \mathbf{a}^\gamma \\
 e^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \wedge \partial_\beta \bar{\xi} &= (\mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_\beta \bar{\xi}) \delta_\gamma^\beta \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \partial_\beta \bar{\xi}) \delta_\gamma^\beta \mathbf{a}^\gamma \\
 &= (\mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) \mathbf{a}^\gamma \\
 &= \text{Tr} \bar{\varepsilon} \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) \mathbf{a}^\gamma
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbf{n}' \simeq (1 - \text{Tr} \bar{\varepsilon}) [(1 + \text{Tr} \bar{\varepsilon}) \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) \mathbf{a}^\gamma]$$

En développant le produit et en négligeant les termes du second ordre, on obtient² :

$$\boxed{\mathbf{n}' \simeq \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) \mathbf{a}^\gamma}$$

Si on exprime $\bar{\xi}$ par ses composantes $\bar{\xi}^i$ sur la base naturelle de \mathcal{S} , le lecteur montrera facilement en calculant la partie normale de sa dérivée qu'on obtient :

$$\boxed{\mathbf{n}' \simeq \mathbf{n} - (b_{\gamma\alpha} \bar{\xi}^\alpha + \partial_\gamma \bar{\xi}^3) \mathbf{a}^\gamma}$$

soit encore sous forme tensorielle:

$$\boxed{\mathbf{n}' \simeq \mathbf{n} - \mathbf{B} \otimes \text{Tg}(\bar{\xi}) - \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3}$$

3.1.6 Tenseur courbure de \mathcal{S}'

Par définition, les composantes covariantes du tenseur courbure de \mathcal{S}' sur la base naturelle de \mathcal{S}' sont :

$$\boxed{b'_{\alpha\beta} = \mathbf{n}' \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}'_\beta = \mathbf{n}' \cdot \partial_\alpha (\mathbf{a}_\beta + \partial_\beta \bar{\xi}) = \mathbf{n}' \cdot (\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{a}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} + \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi})}$$

où \mathbf{n}' a été défini précédemment.

Si on se place dans le cadre des petites déformations, en négligeant les termes du second ordre, on obtient:

$$\begin{aligned}
 b'_{\alpha\beta} &\simeq (\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) \mathbf{a}^\gamma) \cdot (\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \mathbf{a}_\mu + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} + \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi}) \\
 &\simeq b_{\alpha\beta} + \mathbf{n} \cdot \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi} - (\mathbf{n} \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma - (\mathbf{n} \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) (\mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi})
 \end{aligned}$$

3.1.7 Variation de courbure due au déplacement

Soit M un point de \mathcal{S} et Π son plan tangent. Soit $d\mathbf{M} = dx^\alpha \mathbf{a}_\alpha$. Soit $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{M}}{\|d\mathbf{M}\|}$ le vecteur unitaire colinéaire à $d\mathbf{M}$.

La courbure de \mathcal{S} dans la direction \mathbf{t} est :

$$\frac{1}{R} = \mathbf{B}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = \frac{\mathbf{B}(d\mathbf{M}, d\mathbf{M})}{\|d\mathbf{M}\| \|d\mathbf{M}\|} = \frac{\mathbf{B}(d\mathbf{M}, d\mathbf{M})}{\mathbf{A}(d\mathbf{M}, d\mathbf{M})}$$

2. \mathbf{n}' n'est pas tout à fait unitaire du fait de l'approximation.

Soit $\bar{\xi}$ un champ de déplacement. On a

$$M' = M + \bar{\xi} ; \quad dM' = dM + d\bar{\xi}$$

La direction unitaire du transformé de dM est $\mathbf{t}' = \frac{dM'}{\|dM'\|}$. La courbure de S' dans la direction \mathbf{t}' est donc :

$$\frac{1}{R'} = \mathbf{B}'(\mathbf{t}', \mathbf{t}') = \frac{\mathbf{B}'(dM', dM')}{\mathbf{A}'(dM', dM')} = \frac{\mathbf{B}'(dM + d\bar{\xi}, dM + d\bar{\xi})}{dl'^2}$$

La définition du tenseur des déformations entraîne :

$$\frac{1}{R'} = \frac{\mathbf{B}'(dM + d\bar{\xi}, dM + d\bar{\xi})}{dl^2 + 2\bar{\mathbf{L}}(dM, dM)} = \frac{\mathbf{B}'\left(\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}, \mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}\right)}{1 + 2\bar{\mathbf{L}}(\mathbf{t}, \mathbf{t})}$$

La variation de la courbure due au champ de déplacement $\bar{\xi}$ est donc :

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{B}'\left(\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}, \mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}\right)}{1 + 2\bar{\mathbf{L}}(\mathbf{t}, \mathbf{t})} - \mathbf{B}(\mathbf{t}, \mathbf{t})$$

On voit qu'en général, la variation de la courbure dans la direction \mathbf{t} due au champ de déplacement $\bar{\xi}$ n'est pas une fonction linéaire de \mathbf{t} . On ne peut donc pas parler de tenseur de variation de courbure.

3.1.8 Tenseur de variation de courbure en petites déformations

En petites déformations, $\bar{\mathbf{L}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = \bar{\varepsilon}(\mathbf{t}, \mathbf{t})$ est de l'ordre de η . On a donc au second ordre près :

$$\frac{1}{1 + 2\bar{\varepsilon}(\mathbf{t}, \mathbf{t})} \simeq 1 - 2\bar{\varepsilon}(\mathbf{t}, \mathbf{t})$$

La variation de courbure s'écrit donc :

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \simeq [1 - 2\bar{\varepsilon}(\mathbf{t}, \mathbf{t})] \mathbf{B}'\left(\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}, \mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}\right) - \mathbf{B}(\mathbf{t}, \mathbf{t})$$

où³

$$\mathbf{B}'\left(\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}, \mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}\right) = b'_{\alpha\beta} \left[\left(\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}\right) \cdot \mathbf{a}'^{\alpha} \right] \left[\left(\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}\right) \cdot \mathbf{a}'^{\beta} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\xi}}{dl} &= \partial_{\alpha} \bar{\xi} \frac{dx^{\alpha}}{dl} = t^{\alpha} \partial_{\alpha} \bar{\xi} \\ \mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl} &= \mathbf{t} + t^{\alpha} \partial_{\alpha} \bar{\xi} \\ \left(\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}\right) \cdot \mathbf{a}'^{\alpha} &= (\mathbf{t} + t^{\nu} \partial_{\nu} \bar{\xi}) \cdot (\mathbf{a}^{\alpha} + a^{\alpha\mu} \partial_{\mu} \bar{\xi}) \\ &\simeq t^{\alpha} + t^{\nu} (\mathbf{a}^{\alpha} \cdot \partial_{\nu} \bar{\xi}) + a^{\alpha\mu} (\mathbf{t} \cdot \partial_{\mu} \bar{\xi}) \\ &\simeq t^{\alpha} + t^{\nu} (\mathbf{a}^{\alpha} \cdot \partial_{\nu} \bar{\xi}) + a^{\alpha\mu} t^{\rho} (\mathbf{a}_{\rho} \cdot \partial_{\mu} \bar{\xi}) \end{aligned}$$

3. On ne peut pas décomposer linéairement $\mathbf{B}'\left(\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}, \mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}\right)$ en sommes, car \mathbf{B}' est un tenseur de surface dans Π' et ni \mathbf{t} ni $\frac{d\bar{\xi}}{dl}$ n'appartiennent à ce plan. Il faut donc calculer ce scalaire en écrivant les composantes de $\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}$ sur une base de Π' .

De même,

$$\left(\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl} \right) \cdot \mathbf{a}'^{\beta} \simeq t^{\beta} + t^{\nu'} (\mathbf{a}^{\beta} \cdot \partial_{\nu'} \bar{\xi}) + a^{\beta\mu'} t^{\rho'} (\mathbf{a}_{\rho'} \cdot \partial_{\mu'} \bar{\xi})$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' \left(\mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl}, \mathbf{t} + \frac{d\bar{\xi}}{dl} \right) &\simeq b'_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta} + b'_{\alpha\beta} t^{\nu} t^{\beta} (\mathbf{a}^{\alpha} \cdot \partial_{\nu} \bar{\xi}) + b'_{\alpha\beta} a^{\alpha\mu} t^{\rho} t^{\beta} (\mathbf{a}_{\rho} \cdot \partial_{\mu} \bar{\xi}) \\ &+ b'_{\alpha\beta} t^{\nu'} t^{\alpha} (\mathbf{a}^{\beta} \cdot \partial_{\nu'} \bar{\xi}) + b'_{\alpha\beta} a^{\beta\mu'} t^{\rho'} t^{\alpha} (\mathbf{a}_{\rho'} \cdot \partial_{\mu'} \bar{\xi}) \\ &\simeq b'_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta} + b'_{\nu\beta} (\mathbf{a}^{\nu} \cdot \partial_{\alpha} \bar{\xi}) t^{\alpha} t^{\beta} + b'_{\rho\beta} a^{\rho\mu} (\mathbf{a}_{\alpha} \cdot \partial_{\mu} \bar{\xi}) t^{\alpha} t^{\beta} \\ &+ b'_{\alpha\nu'} (\mathbf{a}^{\nu'} \cdot \partial_{\beta} \bar{\xi}) t^{\alpha} t^{\beta} + b'_{\alpha\rho'} a^{\rho'\mu'} (\mathbf{a}_{\beta} \cdot \partial_{\mu'} \bar{\xi}) t^{\alpha} t^{\beta} \\ &\simeq [b'_{\alpha\beta} + 4b'_{\alpha\mu} \bar{\varepsilon}^{\mu}_{\beta}] t^{\alpha} t^{\beta} \end{aligned}$$

avec (en petites déformations)

$$b'_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + \mathbf{n} \cdot \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi} - (\mathbf{n} \cdot \partial_{\gamma} \bar{\xi}) \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} - (\mathbf{n} \cdot \partial_{\gamma} \bar{\xi}) (\mathbf{a}^{\gamma} \cdot \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi})$$

La variation de courbure dans la direction \mathbf{t} en petites déformations est alors :

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \simeq [1 - 2\bar{\varepsilon}(\mathbf{t}, \mathbf{t})] [b'_{\alpha\beta} + 4b'_{\alpha\mu} \bar{\varepsilon}^{\mu}_{\beta}] t^{\alpha} t^{\beta} - b_{\alpha\beta} t^{\alpha} t^{\beta}$$

En développant, la variation de courbure dans la direction \mathbf{t} est :

$$\underbrace{\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}}_{\sim \frac{\delta R}{R}} = \left[\underbrace{b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}}_{\sim \frac{\delta R}{R}} + \underbrace{4b'_{\alpha\mu} \bar{\varepsilon}^{\mu}_{\beta}}_{\sim \frac{\eta}{R}} \right] t^{\alpha} t^{\beta} - \left[\underbrace{2b'_{\alpha\beta} \bar{\varepsilon}_{\gamma\delta}}_{\sim \frac{\eta}{R}} t^{\gamma} t^{\delta} + \underbrace{8b'_{\alpha\mu} \bar{\varepsilon}^{\mu}_{\beta} \bar{\varepsilon}_{\gamma\delta}}_{\sim \frac{\eta^2}{R}} t^{\gamma} t^{\delta} \right] t^{\alpha} t^{\beta}$$

On voit que pour que la variation de courbure dans la direction \mathbf{t} soit une fonction bilinéaire de \mathbf{t} , (c'est à dire pour qu'on puisse parler de *tenseur de variation de courbure*), l'hypothèse des petites déformations n'est pas suffisante. Il faut de plus que le second terme ($\frac{\eta}{R} + \frac{\eta^2}{R}$) soit négligeable devant les termes en $\frac{1}{R} \frac{\delta R}{R}$, c'est à dire

$$\eta \ll \frac{\delta R}{R}$$

Les déformations de surface doivent être petites devant les variations relatives du rayon de courbure. Cette hypothèse, loin d'être évidente est généralement admise dans toutes les théories de coques⁴.

Il reste alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} &= (b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) t^{\alpha} t^{\beta} \\ &= \left[\mathbf{n} \cdot \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi} - (\mathbf{n} \cdot \partial_{\gamma} \bar{\xi}) \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} - (\mathbf{n} \cdot \partial_{\gamma} \bar{\xi}) (\mathbf{a}^{\gamma} \cdot \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi}) \right] t^{\alpha} t^{\beta} \end{aligned}$$

4. Pour les plaques (c'est à dire les coques planes) le rayon de courbure avant déformation est infini. Cette hypothèse est donc parfaitement respectée si le champ de déplacements $\bar{\xi}$ provoque une courbure. Par contre, si $\bar{\xi}$ est tangent à la plaque, elle reste plane et la variation relative du rayon de courbure est nulle. L'hypothèse est alors inacceptable. Ceci explique qu'en théorie des plaques, on n'envisage que des déplacements normaux à la plaque, de la forme $\bar{\xi} = \bar{\xi}^3 \mathbf{n}$.

Pour les coques non planes, l'acceptabilité de l'hypothèse n'est pas évidente: Si on considère par exemple une coque cylindrique de rayon R soumise à un champ de déplacement radial uniforme $\bar{\xi} = \bar{\xi}^3 \mathbf{n}$, il est facile de voir que $\frac{\delta R}{R} \sim \frac{\bar{\xi}^3}{R} \sim \eta$. Les deux termes sont du même ordre de grandeur!

On définit alors le *tenseur de variation de courbure* \mathbf{K} tel que la variation de courbure dans la direction \mathbf{t} due au champ de déplacement $\bar{\xi}$ est donnée par:

$$\boxed{\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \mathbf{K}(\mathbf{t}, \mathbf{t})}$$

et dont les composantes covariantes dans la base naturelle de \mathcal{S} sont:

$$\boxed{K_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi} - (\mathbf{n} \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma - (\mathbf{n} \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) (\mathbf{a}^\gamma \cdot \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi})}$$

On constate que sous les hypothèses précédentes, le tenseur de variation de courbure n'est pas une fonction linéaire de $\bar{\xi}$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le dernier terme soit négligeable, c'est à dire qu'il faut que:

$$\|\partial_\gamma \bar{\xi}\| \|\partial_{\alpha\beta} \bar{\xi}\| \sim \eta \|\partial_{\alpha\beta} \bar{\xi}\| \ll \frac{1}{R} \frac{\delta R}{R}$$

Or on a vu que les conditions d'existence d'un tenseur de variation de courbure sont: $\eta \ll \frac{\delta R}{R}$. Pour que le dernier terme de $K_{\alpha\beta}$ soit du second ordre, il faut donc que

$$\|\partial_{\alpha\beta} \bar{\xi}\| \ll \frac{1}{R} \iff R \|\partial_{\alpha\beta} \bar{\xi}\| \sim \eta$$

Autrement dit, il faut supposer que les dérivées secondes de $\bar{\xi}$ sont petites devant les courbures de \mathcal{S} .

En observant l'expression de la dérivée seconde de $\bar{\xi}$, le lecteur pourra se convaincre que:

$$\boxed{R \|\partial_{\alpha\beta} \bar{\xi}\| \sim \eta \Rightarrow \|\partial_\alpha R\| \sim 1}$$

C'est à dire que, pour que les dérivées secondes soient petites devant les courbures, il faut nécessairement que les courbures évoluent régulièrement quand on passe d'un point à un point voisin.

Dans ces conditions, les composantes covariantes du tenseur de variation de courbure sur la base naturelle de \mathcal{S} sont linéaires en $\bar{\xi}^5$:

$$\boxed{K_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \partial_{\alpha\beta} \bar{\xi} - (\mathbf{n} \cdot \partial_\gamma \bar{\xi}) \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que l'expression tensorielle de la variation de courbure linéarisée \mathbf{K} en fonction de $\bar{\xi}$ est:

$$\boxed{\mathbf{K} = 2 \text{Sym}(\mathbf{B} \otimes \overline{\text{grad}} \text{Tg}(\bar{\xi})) + \text{Tg}(\bar{\xi}) \otimes \overline{\text{grad}} \mathbf{B} + \overline{\text{grad}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 - \bar{\xi}^3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}$$

3.1.9 Conclusion

L'étude des déformations d'une surface conduit à la définition du tenseur de déformation de surface $\bar{\mathbf{L}}$, qui se réduit à $\bar{\varepsilon}$ si les déformations sont petites (au sens des coques, c'est à dire que $\|\partial_\alpha \bar{\xi}\|$ et $\frac{\|\bar{\xi}\|}{R}$ sont des infiniment petits du premier ordre). Ses interprétations géométriques sont similaires à celles de la mécanique des milieux continus tridimensionnelle: Le tenseur des déformations de surface détermine les variations de longueur et de produit scalaire dans des directions tangentes à la surface.

L'étude des variations de courbure montre qu'il n'est possible de parler de tenseur de variation de courbure que sous les hypothèses suivantes:

5. Ce tenseur est parfois appelé *Tenseur de variation de courbure linéarisé*.

- petites déformations ($\|\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\| \ll 1$ et $\frac{\|\bar{\xi}\|}{R} \ll 1$)
 - déformations petites devant les variations relatives de courbure: $\|\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\| \ll \|\frac{\delta R}{R}\|$ (En déformations finies, la variation de courbure dans la direction \mathbf{t} n'est pas une fonction bilinéaire de \mathbf{t}).
- De plus, pour que \mathbf{K} soit linéaire en $\bar{\xi}$, il faut que les dérivées secondes de $\bar{\xi}$ soient petites devant la courbure ($R\|\partial_{\alpha\beta}\bar{\xi}\| \ll 1$ et $\|\partial_{\alpha}R\| \sim 1$)

La section suivante va montrer que dans ce cadre et au prix de quelques approximations supplémentaires, la connaissance du tenseur des petites déformations de surface $\bar{\varepsilon}$ et du tenseur de variation de courbure \mathbf{K} suffit pour connaître le tenseur des petites déformations tridimensionnel ε dans la coque considérée comme un milieu tridimensionnel.

3.2 Petites déformations dans les coques

On considère momentanément la coque comme un milieu tridimensionnel. Un point N de la coque, peut être repéré par 3 paramètres $\{x^1, x^2, x^3\}$, où x^1 et x^2 sont les paramètres qui définissent un point M de la surface moyenne, et x^3 la cote de N par rapport à M suivant la normale \mathbf{n} en M . On a donc :

$$N = M + x^3 \mathbf{n}$$

Les trois paramètres $\{x^1, x^2, x^3\}$ définissent un système de coordonnées spatial induit par la surface moyenne \mathcal{S} . La base naturelle $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de ce système de coordonnées et les composantes du tenseur métrique \mathbf{G} dans cette base ont déjà été étudiées.

Soit $\xi(x^1, x^2, x^3)$ le champ de déplacements de la coque. Un point de la coque déformée est donc défini par :

$$N' = N + \xi(x_1, x_2, x_3)$$

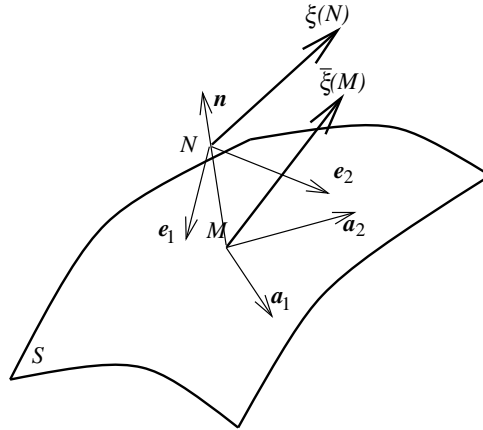


FIG. 3.2 – Champ de déplacements dans la coque

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange en fonction du champ de déplacements est :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}\xi + \mathbf{grad}^t \xi + \mathbf{grad}^t \xi \otimes \mathbf{grad}\xi)$$

et le tenseur des petites déformations est :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}\xi + \mathbf{grad}^t \xi)$$

Ses composantes dans la base naturelle $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}_j \cdot \partial_i \boldsymbol{\xi})$$

On va voir que, sous quelques hypothèses supplémentaires, le tenseur de déformation tridimensionnel ε peut être reconstruit en connaissant les déformations de surface $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ et les variations de courbure \mathbf{K} de la surface.

3.2.1 Hypothèses de Love-Kirchhoff

Ces hypothèses introduisent des restrictions sur le champ des déplacements et sur le champ des déformations dans une coque. Elles sont parfois contestées, et il est possible de remettre en question tout ou partie de ces hypothèses pour construire des théories de coques plus complexes.

Hypothèse 0 : petites déformations

On suppose que les déformations sont petites (au sens des coques) et que les conditions d'existence d'un tenseur de variation de courbure linéaire en $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ sont satisfaites, c'est à dire :

$$\|\partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}}\| \sim \eta ; \frac{\|\bar{\boldsymbol{\xi}}\|}{R} \sim \eta ; R \|\partial_{\alpha\beta} \bar{\boldsymbol{\xi}}\| \sim \eta ; \eta \ll \left\| \frac{\delta R}{R} \right\| ; \|\partial_\alpha R\| \sim 1$$

où η est un infiniment petit adimensionnel d'ordre 1.

Hypothèse 1 : linéarisation en x^3 (coque mince)

On suppose que le champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}(N)$ est peu différent de $\boldsymbol{\xi}(M) = \bar{\boldsymbol{\xi}}(M)$, c'est à dire que si on développe $\boldsymbol{\xi}(x^1, x^2, x^3)$ autour de $x^3 = 0$,

$$\boldsymbol{\xi} = \underbrace{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_{\sim R\eta} + \underbrace{x^3 [\partial_3 \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0}}_{\sim h\eta} + \underbrace{\frac{(x^3)^2}{2} [\partial_{33} \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0} + \dots}_{\sim \frac{h^2}{R}\eta}$$

on ne retient que la partie linéaire en x^3 :

$$\boldsymbol{\xi} = \bar{\boldsymbol{\xi}} + x^3 [\partial_3 \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0}$$

le terme négligé n'est du second ordre que si

$$\frac{h}{R} \sim \eta$$

Cette hypothèse est dite *hypothèse de coque mince*.

Hypothèse 2 : distorsion nulle sur la surface moyenne

On suppose que *sur la surface moyenne*, la distorsion dans tout plan contenant \mathbf{n} est négligeable. C'est à dire que tout point $M + dx^3 \mathbf{n}$ voisin de M sur la normale \mathbf{n} reste sur la normale \mathbf{n}' à M' après déformation. Autrement dit, l'angle du vecteur $dx^3 \mathbf{n}$ avec tout vecteur $d\mathbf{M}$ de Π reste un angle droit après déformation.

Cela signifie que

$$[\varepsilon(\mathbf{t}, \mathbf{n})]_{x_3=0} = 0 \quad \forall \mathbf{t} \in \mathcal{S}$$

soit encore

$$[\varepsilon_{\alpha 3}]_{x_3=0} = 0$$

Or, pour $x^3 = 0$, $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha$. La relation précédente s'écrit donc :

$$\frac{1}{2} (\mathbf{a}_\alpha \cdot [\partial_3 \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0} + \mathbf{n} \cdot [\partial_\alpha \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0}) = 0$$

De plus $[\partial_\alpha \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0} = \partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}}$. La seconde hypothèse de Love-Kirchhoff conduit donc à :

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot [\partial_3 \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0} = -\mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}}$$

Hypothèse 3 : allongement transversal nul sur la surface moyenne

On suppose que *sur la surface moyenne*, l'allongement dans la direction \mathbf{n} est négligeable :

$$[\varepsilon(\mathbf{n}, \mathbf{n})]_{x_3=0} = 0$$

soit encore :

$$[\varepsilon_{33}]_{x_3=0} = 0$$

La troisième hypothèse de Love-Kirchhoff conduit donc à :

$$\mathbf{n} \cdot [\partial_3 \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0} = 0$$

$[\partial_3 \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0}$ est donc un vecteur tangent à la surface.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff

Les hypothèses 2 et 3 déterminent complètement le terme $[\partial_3 \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0}$:

$$[\partial_3 \boldsymbol{\xi}]_{x_3=0} = -(\mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{a}^\alpha$$

Compte tenu de l'hypothèse 1, le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\xi} = \bar{\boldsymbol{\xi}} - x^3 (\mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{a}^\alpha}$$

soit encore sous forme tensorielle :

$$\boxed{\boldsymbol{\xi} = \bar{\boldsymbol{\xi}} - x^3 \left(\mathbf{B} \otimes \text{Tg}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) + \overline{\text{grad}} \bar{\boldsymbol{\xi}}^3 \right)}$$

On voit que sous les hypothèses précédentes, le champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}$ dans la coque peut s'exprimer en fonction du champ de déplacement $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ de la surface moyenne. Remarquer que le «complément de déplacement» est un vecteur tangent proportionnel à x^3 .

Le tenseur de déformation de Love-Kirchhoff

En utilisant ce champ de déplacements restreint, et en tenant compte des hypothèses précédentes, le lecteur pourra vérifier après un calcul assez long que les composantes sur la base naturelle $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ du tenseur des petites déformations dans la coque sont ⁶ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} - x^3 k_{\alpha\beta} \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= 0 \\ \varepsilon_{33} &= 0 \end{aligned}$$

6. en négligeant les termes en $\left(\frac{x^3}{R}\right)^n$ pour $n > 1$

où $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ et $k_{\alpha\beta}$ sont les composantes de $\bar{\varepsilon}$ et de \mathbf{K} dans la base naturelle $\{\mathbf{a}_\alpha\}$ de la surface.

Soit encore tensoriellement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} - x^3 k_{\alpha\beta}) \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta$$

En tout point de la coque, le tenseur de déformation de Love-Kirchhoff est donc un tenseur de déformation plane, dans un plan parallèle au plan tangent à la surface moyenne.

De même, en effectuant le changement de base dans la base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}\}$ le lecteur pourra vérifier que sous les mêmes hypothèses :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} - x^3 k_{\alpha\beta}) \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta$$

Finalement, on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{Tg}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon} - x^3 \mathbf{K}$$

Les hypothèses 2 et 3, de distorsion et d'allongement transversal nuls n'ont été faites qu'au niveau de la surface moyenne. L'hypothèse 1, de linéarisation en x^3 , implique que la distorsion et l'allongement transversal sont alors nuls dans toute l'épaisseur.

Il convient de bien garder à l'esprit le coût en hypothèses qui a permis d'aboutir à ce résultat simple.

Chapitre 4

Efforts intérieurs dans les coques

Pour définir les efforts intérieurs dans les coques, on va employer (comme en mécanique des milieux continus et comme en théorie des poutres) la méthode de la coupure. On en déduira la nécessité de trois tenseurs de surface pour la description des efforts intérieurs à une coque.

4.1 Coupure dans une coque

Soit \mathcal{S} la surface moyenne d'une coque. On partitionne \mathcal{S} en deux parties \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 par une courbe \mathcal{C} tracée sur \mathcal{S} . \mathcal{C} est appelée coupure de \mathcal{S} . On appelle l l'abscisse curviligne sur \mathcal{C} .

Soit $\{\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ le trièdre de Darboux-Ribeaucourt en un point courant M de la coupure \mathcal{C} orientée de telle manière que \mathbf{u} soit une normale unitaire extérieure à \mathcal{S}_1 .

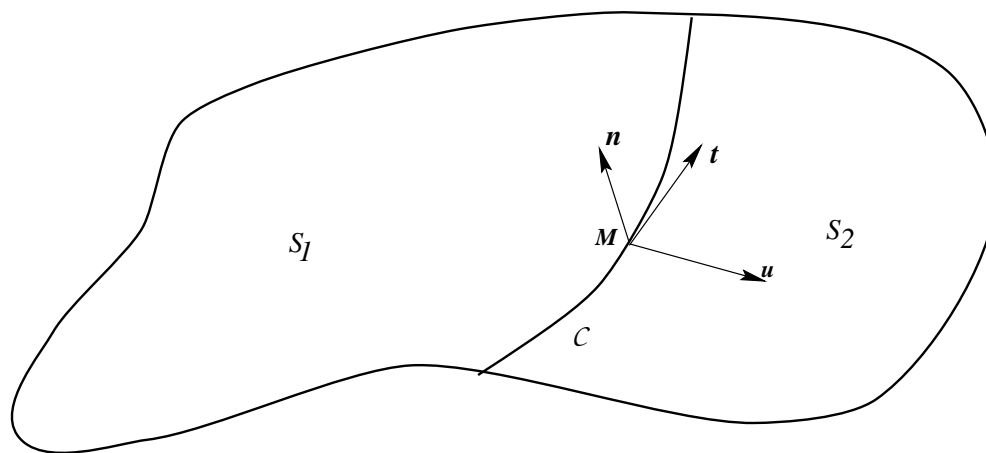


FIG. 4.1 – Coupure dans la surface moyenne

4.2 Contraintes généralisées dans une coque

Comme toute action mécanique, l'action globale de la partie \mathcal{S}_2 sur la partie \mathcal{S}_1 est représentable par un torseur. Le milieu surfacique étant considéré comme un milieu continu, cette action est

répartie le long de la coupure \mathcal{C} en une *densité linéique de torseur*¹.

Au point M , sur un élément de coupure dl de normale unitaire \mathbf{u} extérieure à \mathcal{S}_1 , l'action de \mathcal{S}_2 sur \mathcal{S}_1 est donc un torseur élémentaire $d\mathcal{T}$ dont les éléments de réduction en M sont notés dF (la résultante élémentaire) et dW (le moment élémentaire en M).

On appelle contraintes généralisées les limites de la résultante et du moment élémentaires en M lorsque dl tend vers 0 :

- La *force linéique* est :

$$\mathbf{F}_l = \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{dF}{dl}$$

La force linéique dans une coque est une *force par unité de longueur*.

- Le *moment linéique* est :

$$\mathbf{M}_l = \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{dW}{dl}$$

Le moment linéique est un *moment par unité de longueur* (il est donc homogène à une force!).

On donne des noms aux différentes composantes de ces vecteurs sur le trièdre de Darboux-Ribeaucourt en M :

$\mathbf{F}_l \cdot \mathbf{u}$ est appelé *Tension normale*

$\mathbf{F}_l \cdot \mathbf{t}$ est appelé *Tension tangentielle*

$\mathbf{F}_l \cdot \mathbf{n}$ est appelé *Force linéique tranchante*

Contrairement aux habitudes prises en mécanique des milieux continus tridimensionnelle ou en théorie des poutres, les qualificatifs *tangentiel* et *tranchant* ont des significations différentes.

La partie tangente de \mathbf{F}_l est un vecteur de Π appelé *tension*, on la note \mathbf{T}_l :

$$\boxed{\mathbf{T}_l = (\mathbf{F}_l \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} + (\mathbf{F}_l \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}}$$

On note Q_l la composante normale (un scalaire) de \mathbf{F}_l :

$$\boxed{Q_l = \mathbf{F}_l \cdot \mathbf{n}}$$

$\mathbf{M}_l \cdot \mathbf{u}$ est appelé *Moment linéique de torsion*

$\mathbf{M}_l \cdot \mathbf{t}$ est appelé *Moment linéique de flexion*

$\mathbf{M}_l \cdot \mathbf{n}$ n'a pas de nom. On verra plus loin que cette composante est nulle.

Le vecteur \mathbf{M}_l est donc un vecteur tangent.

4.3 Les trois tenseurs des contraintes généralisées

Pour démontrer l'existence de ces trois tenseurs, on va momentanément considérer la coque comme un milieu tridimensionnel, et on utilisera la tensorialité du tenseur des contraintes de Cauchy pour démontrer la tensorialité de ces trois tenseurs.

1. En mécanique des milieux continus tridimensionnelle, la densité *surfactive* de torseur répartie sur la *surface* coupure avait été réduite à une densité surfactive de *force* (sauf en magnétohydrodynamique). Ici, on conserve une densité linéique de torseur complet (avec une résultante linéique et un moment linéique). On admet donc qu'en théorie des coques, des particules surfaciques voisines puissent exercer entre elles des moments. C'est indispensable pour modéliser la résistance des coques à la flexion. En théorie des poutres, les actions intérieures sont aussi représentées par un torseur complet pour les mêmes raisons.

4.3.1 Surface coupure dans une coque

On appelle *surface coupure* la surface définie par :

$$\tilde{\mathcal{S}} = \left\{ N \mid N = M + x^3 \mathbf{n} ; \forall M \in \mathcal{C} ; x^3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\}$$

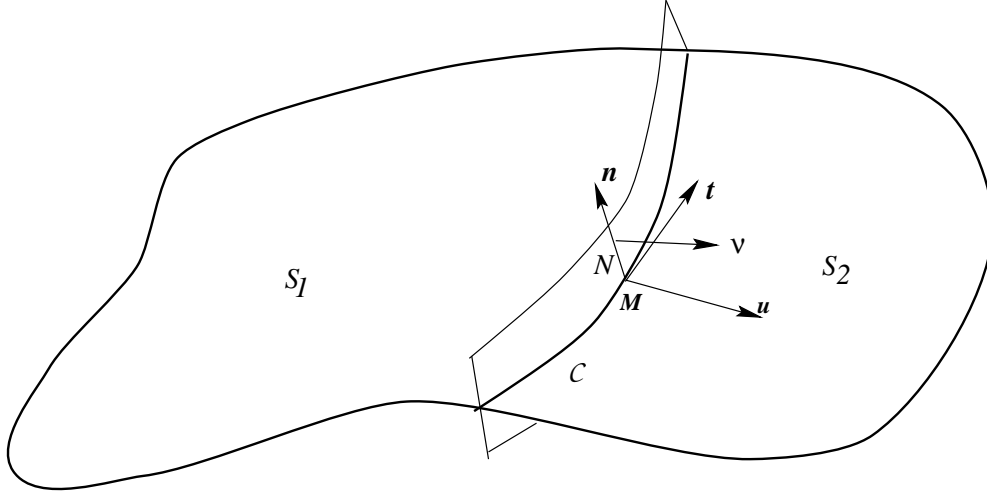


FIG. 4.2 – Surface coupure dans une coque

La surface $\tilde{\mathcal{S}}$ partitionne donc la coque en deux coques dont les surfaces moyennes sont \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .

On va donner quelques propriétés de la surface $\tilde{\mathcal{S}}$ utiles dans la suite.

Les points N de la surface coupure $\tilde{\mathcal{S}}$ sont naturellement repérés par les paramètres l (l'abscisse curviligne de M sur \mathcal{C}) et x^3 (la distance MN) pris dans cet ordre. La base naturelle de $\tilde{\mathcal{S}}$ est donc :

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = \frac{\partial N}{\partial l} = \frac{\partial M}{\partial l} + x^3 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial l} = \mathbf{t} - x^3 \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{t} = (\mathbf{A} - x^3 \mathbf{B}) \overline{\otimes} \mathbf{t}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_2 = \frac{\partial N}{\partial x^3} = \mathbf{n}$$

On appelle $\boldsymbol{\nu}$ la normale unitaire à la surface coupure $\tilde{\mathcal{S}}$. On a :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{a}}_2 &= (\mathbf{t} - x^3 \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{t}) \wedge \mathbf{n} \\ &= \mathbf{u} - x^3 (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{t}) \wedge \mathbf{n} \\ &= \mathbf{u} - x^3 \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{t}) \\ &= \mathbf{u} + x^3 \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} (\mathbf{B} \overline{\otimes} (\overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{u})) \\ &= \mathbf{u} + x^3 \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{A} + x^3 \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}}) \overline{\otimes} \mathbf{u} \end{aligned}$$

La quantité $\boldsymbol{\nu} d\tilde{s}$ est par définition :

$$\boldsymbol{\nu} d\tilde{s} = \tilde{\mathbf{a}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{a}}_2 dl dx^3 = (\mathbf{A} + x^3 \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}}) \overline{\otimes} \mathbf{u} dl dx^3$$

où le terme complémentaire $x^3 \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}}$ est de l'ordre de $\frac{h}{R}$.

4.3.2 Relation entre les contraintes généralisées et les contraintes

Soit $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy dans la coque. Considérons une tranche de la surface coupure $\tilde{\mathcal{S}}$, de largeur dl et de hauteur h . Son élément de surface est $d\tilde{s}$.

La résultante de l'action de la partie 2 sur la partie 1 sur cette tranche est :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_l dl &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\nu} ds \\
 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} \otimes (\mathbf{A} + x^3 \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}}) \otimes \mathbf{u} dx^3 dl \\
 \mathbf{F}_l &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{u} dx^3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \boldsymbol{\sigma} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{u} dx^3 \\
 &= \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} dx^3 \right] \otimes \mathbf{u} + \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \boldsymbol{\sigma} dx^3 \right] \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

En posant $\mathbf{I}_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} dx^3$ et $\mathbf{I}_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \boldsymbol{\sigma} dx^3$, on obtient :

$$\boxed{\mathbf{F}_l = \mathbf{I}_0 \otimes \mathbf{u} + \mathbf{I}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{u}}$$

De même, le moment résultant au point M de l'action de la partie 2 sur la partie 1 sur cette tranche est :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_l dl &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} MN \wedge (\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\nu}) ds \\
 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \mathbf{n} \wedge [\boldsymbol{\sigma} \otimes (\mathbf{A} + x^3 \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}}) \otimes \mathbf{u}] dx^3 dl \\
 \mathbf{M}_l &= \mathbf{n} \wedge \left[\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \boldsymbol{\sigma} dx^3 \right) \otimes \mathbf{u} \right] + \mathbf{n} \wedge \left[\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x^3)^2 \boldsymbol{\sigma} dx^3 \right) \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{u} \right]
 \end{aligned}$$

En posant $\mathbf{I}_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x^3)^2 \boldsymbol{\sigma} dx^3$, on obtient :

$$\boxed{\mathbf{M}_l = \mathbf{n} \wedge [\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{u}] + \mathbf{n} \wedge [\mathbf{I}_2 \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{u}]}$$

Cette dernière égalité montre que le vecteur moment linéique \mathbf{M}_l est un vecteur tangent, car il est orthogonal à \mathbf{n} , ce qui justifie le fait qu'on n'ait pas donné de nom à la composante normale de \mathbf{M}_l .

Remarque : Il faut bien noter que les trois tenseurs \mathbf{I}_0 , \mathbf{I}_1 et \mathbf{I}_2 sont des intégrales de $\boldsymbol{\sigma}$. Ce sont donc des tenseurs tridimensionnels, auxquels on applique des vecteurs tangents. Le résultat n'est pas en général un vecteur tangent.

4.3.3 Tenseur tension ou Tenseur des efforts de membrane

La force linéique \mathbf{F}_l est en général un vecteur non tangent. Sa partie tangente est :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_l &= \text{Tg}(\mathbf{F}_l) \\
 &= \text{Tg}(\mathbf{I}_0 \otimes \mathbf{u}) + \text{Tg}(\mathbf{I}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{u}) \\
 &= \text{Tg}(\mathbf{I}_0) \otimes \mathbf{u} + \text{Tg}(\mathbf{I}_1) \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{u} \\
 &= [\text{Tg}(\mathbf{I}_0) + \text{Tg}(\mathbf{I}_1) \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}}] \otimes \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Cette égalité montre qu'il existe un endomorphisme linéaire de Π , qu'on note \mathbf{T} , qui à tout \mathbf{u} unitaire, normal à la coupure \mathcal{C} et tangent à \mathcal{S} , associe la partie tangente \mathbf{T}_l de \mathbf{F}_l :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_l &= \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \\ \text{avec} \\ \mathbf{T} &= \text{Tg}(\mathbf{I}_0) + \text{Tg}(\mathbf{I}_1) \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{T} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 + \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 \right] \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}}}$$

Le tenseur de surface du second ordre associé à cet endomorphisme est appelé *tenseur tension* ou encore *tenseur de membrane*.

Le premier terme est de l'ordre de σh , le second, de l'ordre de $\sigma h \frac{h}{R}$ peut être négligé devant le premier si la coque est mince.

Les composantes (par exemple deux fois covariantes) de \mathbf{T} dans la base naturelle de \mathcal{S} sont :

$$T_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dx^3 + \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \sigma_{\alpha\gamma} dx^3 \right] \overline{e}^{\gamma\delta} b_{\delta\varepsilon} \overline{e}_{\varepsilon\beta}$$

où σ_{ij} sont les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ dans la base naturelle $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}\}$ de \mathcal{S}^2 .

Elles montrent que le tenseur \mathbf{T} n'est symétrique que si on néglige le second terme.

4.3.4 Tenseur tranchant

La composante normale de \mathbf{F}_l est le scalaire

$$\begin{aligned} Q_l &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_l \\ &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{I}_0 \overline{\otimes} \mathbf{u}) + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{I}_1 \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \\ &= \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{n} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma} dx^3 \right] \overline{\otimes} \mathbf{u} + \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \mathbf{n} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma} dx^3 \right] \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{u} \end{aligned}$$

Il est à noter que $\mathbf{n} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma}$ est en général un vecteur non tangent, alors que \mathbf{u} et $\overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{u}$ sont des vecteurs tangents. On a donc

$$Q_l = \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \text{Tg}(\mathbf{n} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma}) dx^3 \right] \overline{\otimes} \mathbf{u} + \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \text{Tg}(\mathbf{n} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma}) dx^3 \right] \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{u}$$

Cette égalité montre qu'il existe une forme linéaire de Π , qu'on note \mathbf{Q} , qui, à tout \mathbf{u} unitaire, normal à la coupure \mathcal{C} et tangent à \mathcal{S} , associe la composante normale Q_l de \mathbf{F}_l :

$$Q_l = \mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}$$

avec

$$\boxed{\mathbf{Q} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \text{Tg}(\mathbf{n} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma}) dx^3 + \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \text{Tg}(\mathbf{n} \overline{\otimes} \boldsymbol{\sigma}) dx^3 \right] \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{B} \overline{\otimes} \overline{\mathbf{E}}}$$

2. et non dans la base locale d'espace $\{e_1, e_2, \mathbf{n}\}$ car on ne peut sommer des composantes que si elles sont relatives à une même base.

Ce tenseur de surface d'ordre 1 (un vecteur) est appelé *tenseur tranchant*. La partie normale de \mathbf{F}_l est donc $Q_l \mathbf{n} = (\mathbf{Q} \otimes \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{n}$.

Le premier terme est de l'ordre de σh , le second, de l'ordre de $\sigma h \frac{h}{R}$ peut être négligé devant le premier si la coque est mince.

Les composantes (par exemple covariantes) de \mathbf{Q} dans la base naturelle de \mathcal{S} sont :

$$Q_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{3\alpha} dx^3 + \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \sigma_{3\beta} \right] \bar{e}^{\beta\gamma} b_\gamma^\delta \bar{e}_{\delta\alpha}$$

où σ_{ij} sont les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ dans la base naturelle $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}\}$ de \mathcal{S}^3 .

4.3.5 Tenseur des moments linéiques

Le moment linéique est le vecteur tangent

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{n} \wedge [\mathbf{I}_1 \otimes \bar{\mathbf{u}}] + \mathbf{n} \wedge [\mathbf{I}_2 \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \bar{\mathbf{u}}]$$

$\mathbf{I}_1 \otimes \bar{\mathbf{u}}$ n'est pas un vecteur tangent. On pose

$$\mathbf{I}_1 \otimes \bar{\mathbf{u}} = \text{Tg}(\mathbf{I}_1 \otimes \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{n} \otimes \mathbf{I}_1 \otimes \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{n}$$

$$\mathbf{n} \wedge [\mathbf{I}_1 \otimes \bar{\mathbf{u}}] = \mathbf{n} \wedge [\text{Tg}(\mathbf{I}_1 \otimes \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{n} \otimes \mathbf{I}_1 \otimes \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{n}] = \mathbf{n} \wedge [\text{Tg}(\mathbf{I}_1 \otimes \bar{\mathbf{u}})]$$

De même,

$$\mathbf{n} \wedge [\mathbf{I}_2 \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \bar{\mathbf{u}}] = \mathbf{n} \wedge [\text{Tg}(\mathbf{I}_2 \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \bar{\mathbf{u}})]$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l &= \mathbf{n} \wedge [\text{Tg}(\mathbf{I}_1) \otimes \bar{\mathbf{u}}] + \mathbf{n} \wedge [\text{Tg}(\mathbf{I}_2) \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \bar{\mathbf{u}}] \\ &= [-\bar{\mathbf{E}} \otimes \text{Tg}(\mathbf{I}_1) - \bar{\mathbf{E}} \otimes \text{Tg}(\mathbf{I}_2) \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \bar{\mathbf{E}}] \otimes \bar{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Cette égalité montre qu'il existe un endomorphisme linéaire de Π , qu'on note \mathbf{M} , qui, à tout \mathbf{u} unitaire, normal à la coupure \mathcal{C} et tangent à \mathcal{S} , associe le moment linéique \mathbf{M}_l :

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{M} \otimes \bar{\mathbf{u}}$$

avec

$$\mathbf{M} = -\bar{\mathbf{E}} \otimes \text{Tg}(\mathbf{I}_1) - \bar{\mathbf{E}} \otimes \text{Tg}(\mathbf{I}_2) \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \bar{\mathbf{E}}$$

$$\boxed{\mathbf{M} = -\bar{\mathbf{E}} \otimes \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 - \bar{\mathbf{E}} \otimes \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x^3)^2 \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 \right] \otimes \bar{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{B} \otimes \bar{\mathbf{E}}}$$

Ce tenseur de surface du second ordre est appelé *tenseur des moments linéiques*.

Le premier terme est de l'ordre de σh^2 , le second, de l'ordre de $\sigma h^2 \frac{h}{R}$ peut être négligé devant le premier si la coque est mince.

3. et non dans la base locale d'espace $\{e_1, e_2, \mathbf{n}\}$ car on ne peut sommer des composantes que si elles sont relatives à une même base.

Les composantes (par exemple deux fois covariantes) de \mathbf{M} dans la base naturelle de \mathcal{S} sont :

$$M_{\alpha\beta} = -\bar{e}_{\alpha\gamma} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \sigma^{\gamma\beta} dx^3 - \bar{e}_{\alpha\gamma} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x^3)^2 \sigma^{\gamma\delta} dx^3 \right] \bar{e}_{\delta\varepsilon} b^{\varepsilon\varphi} \bar{e}_{\varphi\beta}$$

où σ_{ij} sont les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ dans la base naturelle $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}\}$ de \mathcal{S}^4 .

Elles montrent que le tenseur \mathbf{M} n'est pas symétrique.

Remarque

Baucoup d'ouvrages introduisent un autre tenseur moment linéique qu'on notera ici $\widetilde{\mathbf{M}}$ défini par⁵ :

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 + \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x^3)^2 \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 \right] \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{B} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}}$$

c'est à dire qu'on pose

$$\mathbf{M} = -\bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \widetilde{\mathbf{M}}$$

soit inversement

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{M}$$

Le moment linéique de torsion s'exerçant sur l'élément dl de normale \mathbf{u} est alors :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_l = \mathbf{u} \bar{\otimes} \mathbf{M} \bar{\otimes} \mathbf{u} = -\mathbf{u} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \widetilde{\mathbf{M}} \bar{\otimes} \mathbf{u} = -\mathbf{t} \bar{\otimes} \widetilde{\mathbf{M}} \bar{\otimes} \mathbf{u}$$

et le moment linéique de flexion autour de \mathbf{t} sur le même élément dl est :

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{M}_l = \mathbf{t} \bar{\otimes} \mathbf{M} \bar{\otimes} \mathbf{u} = -\mathbf{t} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \widetilde{\mathbf{M}} \bar{\otimes} \mathbf{u} = \mathbf{u} \bar{\otimes} \widetilde{\mathbf{M}} \bar{\otimes} \mathbf{u}$$

Pour les coques minces, si on néglige le second terme, le tenseur $\widetilde{\mathbf{M}}$ est symétrique.

4.4 Conclusion

L'analyse des efforts intérieurs dans une coque nous a conduit à introduire trois tenseurs pour décrire les efforts intérieurs dans une coque.

— Le tenseur de surface du second ordre \mathbf{T} qui donne la partie tangente de la force linéique sur une coupure dl de normale unitaire \mathbf{u} ; $\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{u}$ est un vecteur tangent ; $\mathbf{u} \bar{\otimes} \mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{u}$ est la tension normale ; $\mathbf{t} \bar{\otimes} \mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{u}$ est la tension tangentielle.

— Le tenseur de surface du premier ordre \mathbf{Q} qui donne la composante normale de la force linéique sur une coupure dl de normale unitaire \mathbf{u} ; $\mathbf{Q} \bar{\otimes} \mathbf{u}$ est un scalaire ; $\mathbf{F}_l \cdot \mathbf{n} = \mathbf{Q} \bar{\otimes} \mathbf{u}$.

— Le tenseur de surface du second ordre \mathbf{M} qui donne le moment linéique (tangent) sur une coupure dl de normale unitaire \mathbf{u} ; $\mathbf{u} \bar{\otimes} \mathbf{M} \bar{\otimes} \mathbf{u}$ est le moment linéique de torsion ; $\mathbf{t} \bar{\otimes} \mathbf{M} \bar{\otimes} \mathbf{u}$ est le moment linéique de flexion.

Il reste maintenant à écrire les équations de la mécanique qui fourniront les équations différentielles régissant ces trois tenseurs.

4. et non dans la base locale d'espace $\{e_1, e_2, \mathbf{n}\}$ car on ne peut sommer des composantes que si elles sont relatives à une même base.

5. Dans la lecture d'un ouvrage ou dans l'utilisation d'un logiciel de calcul de coques, il est important de savoir de quel tenseur de moment linéique on parle, pour en interpréter correctement les résultats.

Chapitre 5

Équations d'équilibre local des coques

Pour établir les équations d'équilibre local des coques, on utilise la méthode du bilan, c'est à dire qu'on les déduira de l'équilibre global d'une portion quelconque de la coque¹. Ce sont les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les trois tenseurs de contraintes généralisées pour que le principe fondamental de la mécanique soit respecté.

Soit \mathcal{S} la surface moyenne d'une coque. Soit \mathcal{C}^* une courbe fermée de \mathcal{S} entourant la portion \mathcal{S}^* .

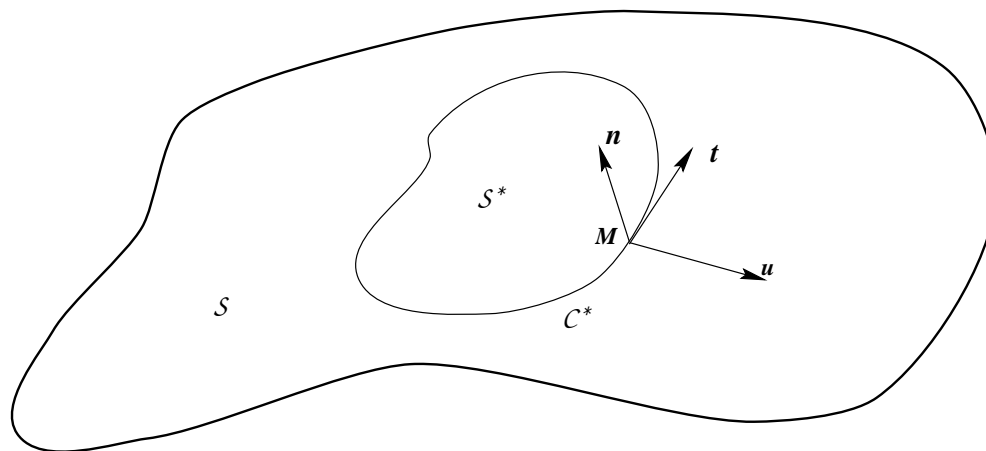


FIG. 5.1 – Équilibre d'une portion quelconque

Soit M un point courant de \mathcal{C}^* . On définit en chaque point P de \mathcal{C}^* le trièdre de Darboux-Ribeaucourt attaché à \mathcal{C}^* de telle manière que \mathbf{u} soit une normale unitaire tangente à \mathcal{S} et sortante de \mathcal{S}^* .

La coque subit des actions extérieures réparties sur sa surface moyenne. On note \mathbf{p} la densité surfacique de force extérieure qui s'exerce en chacun de ses points².

Les actions extérieures à la portion \mathcal{S}^* sont donc :

1. C'est cette méthode qui a aussi été utilisée en mécanique des milieux continus tridimensionnels et en théorie des poutres.

2. On pourrait aussi compléter les actions extérieures avec une densité surfacique de moment $\boldsymbol{\mu}$, mais de telles sollicitations extérieures sont très rares dans la pratique. Il n'est pas d'usage de les considérer dans les traités sur les coques. Le lecteur soucieux de généralité pourra sans difficulté compléter les équations d'équilibre local.

- la partie de la densité surfacique de force \mathbf{p} qui s'exerce sur \mathcal{S}^* ,
- les actions du reste de la coque sur la portion \mathcal{S}^* , qui s'exercent sur la frontière \mathcal{C}^* de \mathcal{S}^* . Ces actions sont des forces linéiques et des moments linéiques. En chaque point M de \mathcal{C}^* , les actions extérieures à \mathcal{S}^* sont :
 - une densité linéique de force tangente $\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u}$
 - une densité linéique de force normale $(\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n}$
 - une densité linéique de moment tangente $\mathbf{M} \overline{\otimes} \mathbf{u}$

Le principe fondamental de la mécanique appliqué à la portion \mathcal{S}^* s'écrit donc avec les deux équations vectorielles :

Équilibre des résultantes :

$$\int_{\mathcal{S}^*} \mathbf{p} \, ds + \int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl + \int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n} \, dl = \mathbf{0}$$

Équilibre des moments en un point O quelconque :

$$\int_{\mathcal{S}^*} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p} \, ds + \int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \, dl + \int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n} \, dl + \int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{M} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl = \mathbf{0}$$

On transforme les intégrales sur \mathcal{C}^* en intégrales sur \mathcal{S}^* à l'aide du théorème de la divergence. Ces intégrales de surface étant nulles pour toute portion \mathcal{S}^* , on en déduira les équations d'équilibre local.

5.1 Équilibre des résultantes

$$\int_{\mathcal{S}^*} \mathbf{p} \, ds + \int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl + \int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n} \, dl = \mathbf{0}$$

- L'intégrale $\int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl$ est une intégrale curviligne de vecteurs tangents. En utilisant le théorème de la divergence pour les tenseurs de surface du second ordre, on obtient :

$$\int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl = \int_{\mathcal{S}^*} \overline{\text{div}} \mathbf{T} + (\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{B}) \mathbf{n} \, ds$$

- L'intégrale $\int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n} \, dl$ est une intégrale curviligne de vecteurs portés par \mathbf{n} (donc non tangents). On ne peut donc pas appliquer l'analyse sur les surfaces pour la transformer en intégrale sur \mathcal{S}^* . Pour la calculer, on considère une base orthonormée fixe $\{\mathbf{E}_k\}$. Le calcul de cette intégrale vectorielle peut se ramener au calcul de trois intégrales scalaires :

$$\begin{aligned} I_k &= \mathbf{E}_k \cdot \int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n} \, dl \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \, dl \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} [(\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Q}] \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl \end{aligned}$$

En posant

$$\mathbf{W} = (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) \mathbf{Q}$$

\mathbf{W} est un vecteur tangent. On peut utiliser le théorème de la divergence pour les vecteurs tangents, on obtient :

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{C^*} \mathbf{W} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl \\ &= \int_{S^*} \overline{\text{div}} \mathbf{W} \, ds \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \overline{\text{div}} \mathbf{W} &= \partial_\alpha W^\alpha + W^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha \\ &= \partial_\alpha [(\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) Q^\alpha] + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) Q^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha \\ &= \partial_\alpha (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) Q^\alpha + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) \partial_\alpha Q^\alpha + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) Q^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha \\ &= (\mathbf{E}_k \cdot \partial_\alpha \mathbf{n}) Q^\alpha + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) \partial_\alpha Q^\alpha + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) Q^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha \\ &= \mathbf{E}_k \cdot (-b_{\alpha\beta}^\beta \mathbf{a}_\beta) Q^\alpha + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{n}) (\partial_\alpha Q^\alpha + Q^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha) \\ &= \mathbf{E}_k \cdot (\mathbf{n} \overline{\text{div}} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q}) \end{aligned}$$

On a donc

$$I_k = \mathbf{E}_k \cdot \int_{S^*} \mathbf{n} \overline{\text{div}} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q} \, ds$$

et donc

$$I = \int_{S^*} \mathbf{n} \overline{\text{div}} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q} \, ds$$

L'équilibre des résultantes s'écrit donc :

$$\int_{S^*} \mathbf{p} \, ds + \int_{S^*} \overline{\text{div}} \mathbf{T} + (\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{B}) \mathbf{n} \, ds + \int_{S^*} \mathbf{n} \overline{\text{div}} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q} \, ds = \mathbf{0}$$

Cette équation étant vraie quelque soit la portion S^* , on en déduit l'équation vectorielle :

$$\boxed{\mathbf{p} + \overline{\text{div}} \mathbf{T} + (\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{B}) \mathbf{n} + \mathbf{n} \overline{\text{div}} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q} = \mathbf{0}}$$

L'égalité des parties tangentes est :

$$\boxed{\text{Tg}(\mathbf{p}) + \overline{\text{div}} \mathbf{T} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q} = \mathbf{0}}$$

L'égalité des parties normales est :

$$\boxed{p^3 + \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{B} + \overline{\text{div}} \mathbf{Q} = 0}$$

soit trois équations scalaires sur la base naturelle :

$$\begin{aligned} p^\alpha + \partial_\beta T^{\alpha\beta} + T^{\gamma\beta} \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + T^{\alpha\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}^\beta - b_{\alpha\beta}^\alpha Q^\beta &= 0 \quad (\text{partie tangente, 2 équations}) \\ p^3 + b_{\beta\gamma}^\beta T^{\beta\gamma} + \partial_\beta Q^\beta + Q^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\beta &= 0 \quad (\text{partie normale, 1 équation}) \end{aligned}$$

5.2 Équilibre des moments

$$\int_{S^*} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p} \, ds + \int_{C^*} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \, dl + \int_{C^*} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n} \, dl + \int_{C^*} \mathbf{M} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl = \mathbf{0}$$

• L'intégrale $\int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u}) dl$ est une intégrale curviligne de vecteurs non tangents. Pour la calculer on utilise encore une base orthonormée fixe $\{\mathbf{E}_k\}$. On calcule les trois intégrales scalaires :

$$\begin{aligned} I_k &= \mathbf{E}_k \cdot \int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u}) dl \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, (\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u})) dl \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, T^{\alpha\beta} u_\beta \mathbf{a}_\alpha) dl \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha) u_\beta dl \end{aligned}$$

On pose

$$\mathbf{W} = (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha) \mathbf{a}_\beta$$

\mathbf{W} est un vecteur tangent, et l'intégrale I_k s'écrit :

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{W} \overline{\otimes} \mathbf{u} dl \\ &= \int_{\mathcal{S}^*} \overline{\text{div}} \mathbf{W} ds \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \overline{\text{div}} \mathbf{W} &= \partial_\beta W^\beta + W^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\beta \\ &= \partial_\beta (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha) + (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, T^{\alpha\gamma} \mathbf{a}_\alpha) \Gamma_{\gamma\beta}^\beta \\ &= (\mathbf{E}_k, \mathbf{a}_\beta, T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha) + (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, \partial_\beta (T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha)) + (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, T^{\alpha\gamma} \mathbf{a}_\alpha) \Gamma_{\gamma\beta}^\beta \\ &= \mathbf{E}_k \cdot \left[\mathbf{a}_\beta \wedge (T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha) + \mathbf{OM} \wedge \partial_\beta (T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha) + \mathbf{OM} \wedge (T^{\alpha\gamma} \mathbf{a}_\alpha) \Gamma_{\gamma\beta}^\beta \right] \\ &= \mathbf{E}_k \cdot \left[(\overline{\mathbf{e}}_{\beta\alpha} T^{\alpha\beta}) \mathbf{n} + \mathbf{OM} \wedge \left(\partial_\beta (T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha) + \Gamma_{\gamma\beta}^\beta (T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha) \right) \right] \\ &= \mathbf{E}_k \cdot \left[(\overline{\mathbf{e}}_{\beta\alpha} T^{\alpha\beta}) \mathbf{n} + \mathbf{OM} \wedge \left(\partial_\beta (T^{\alpha\beta}) \mathbf{a}_\alpha + T^{\alpha\beta} (\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma + b_{\beta\alpha}) \mathbf{n} \right) + \Gamma_{\gamma\beta}^\beta (T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha) \right] \\ &= \mathbf{E}_k \cdot \left[-(\overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{T}) \mathbf{n} + \mathbf{OM} \wedge \left(\overline{\text{div}} \mathbf{T} + (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{T}) \mathbf{n} \right) \right] \end{aligned}$$

Finalement,

$$I_k = \mathbf{E}_k \cdot \int_{\mathcal{S}^*} -(\overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{T}) \mathbf{n} + \mathbf{OM} \wedge \left(\overline{\text{div}} \mathbf{T} + (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{T}) \mathbf{n} \right) ds$$

et donc

$$\int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{u}) dl = \int_{\mathcal{S}^*} -(\overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{T}) \mathbf{n} + \mathbf{OM} \wedge \left(\overline{\text{div}} \mathbf{T} + (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{T}) \mathbf{n} \right) ds$$

• On transforme maintenant l'intégrale $\int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n} dl$ en intégrale de surface. Pour la calculer, on utilise encore une base fixe orthonormée $\{\mathbf{E}_k\}$ et on calcule les trois intégrales scalaires :

$$\begin{aligned} J_k &= \mathbf{E}_k \cdot \int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n} dl \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n}) dl \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, Q^\beta u_\beta \mathbf{n}) dl \\ &= \int_{\mathcal{C}^*} (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, Q^\beta \mathbf{n}) u_\beta dl \end{aligned}$$

On pose

$$\mathbf{W} = (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, Q^\beta \mathbf{n}) \mathbf{a}_\beta$$

\mathbf{W} est un vecteur tangent, et l'intégrale J_k s'écrit :

$$\begin{aligned} J_k &= \int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{W} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl \\ &= \int_{\mathcal{S}^*} \overline{\text{div}} \mathbf{W} \, ds \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \overline{\text{div}} \mathbf{W} &= \partial_\beta W^\beta + W^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\beta \\ &= \partial_\beta (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, Q^\beta \mathbf{n}) + (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, Q^\gamma \mathbf{n}) \Gamma_{\gamma\beta}^\beta \\ &= (\mathbf{E}_k, \mathbf{a}_\beta, Q^\beta \mathbf{n}) + (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, \partial_\beta (Q^\beta \mathbf{n})) + (\mathbf{E}_k, \mathbf{OM}, \mathbf{n}) Q^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\beta \\ &= \mathbf{E}_k \cdot \left[\mathbf{a}_\beta \wedge \mathbf{n} Q^\beta + \mathbf{OM} \wedge \partial_\beta (Q^\beta \mathbf{n}) + \mathbf{OM} \wedge \mathbf{n} Q^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\beta \right] \\ &= \mathbf{E}_k \cdot \left[\mathbf{Q} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{OM} \wedge (\partial_\beta Q^\beta \mathbf{n} - Q^\beta b_\beta^\gamma \mathbf{a}_\gamma + \mathbf{n} Q^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\beta) \right] \\ &= \mathbf{E}_k \cdot \left[\overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{Q} + \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{n} \overline{\text{div}} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q}) \right] \end{aligned}$$

Finalement,

$$J_k = \mathbf{E}_k \cdot \int_{\mathcal{S}^*} \mathbf{E} \overline{\otimes} \mathbf{Q} + \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{n} \overline{\text{div}} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q}) \, ds$$

et donc

$$\int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{Q} \overline{\otimes} \mathbf{u}) \mathbf{n} \, dl = \int_{\mathcal{S}^*} \mathbf{E} \overline{\otimes} \mathbf{Q} + \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{n} \overline{\text{div}} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q}) \, ds$$

• L'intégrale $\int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{M} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl$ se transforme directement en intégrale de surface en utilisant le théorème de la divergence pour les tenseurs de surface :

$$\int_{\mathcal{C}^*} \mathbf{M} \overline{\otimes} \mathbf{u} \, dl = \int_{\mathcal{S}^*} \overline{\text{div}} \mathbf{M} + (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{M}) \mathbf{n} \, ds$$

• L'équilibre des moments extérieurs à la partie \mathcal{S}^* s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \int_{\mathcal{S}^*} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p} \, ds \\ &+ \int_{\mathcal{S}^*} -(\overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{T}) \mathbf{n} + \mathbf{OM} \wedge (\overline{\text{div}} \mathbf{T} + (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{T}) \mathbf{n}) \, ds \\ &+ \int_{\mathcal{S}^*} \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{Q} + \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{n} \overline{\text{div}} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q}) \, ds \\ &+ \int_{\mathcal{S}^*} \overline{\text{div}} \mathbf{M} + (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{M}) \mathbf{n} \, ds \end{aligned}$$

Cette équation étant vraie quelque soit la portion \mathcal{S}^* , on en déduit l'équation vectorielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= -(\overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{T}) \mathbf{n} + \overline{\mathbf{E}} \overline{\otimes} \mathbf{Q} + \overline{\text{div}} \mathbf{M} + (\mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{M}) \mathbf{n} \\ &+ \mathbf{OM} \wedge \left[\mathbf{p} + \overline{\text{div}} \mathbf{T} + \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{T} \mathbf{n} + \mathbf{n} \overline{\text{div}} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \overline{\otimes} \mathbf{Q} \right] \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul à cause de l'équation d'équilibre local des résultantes. Il reste :

$$\mathbf{0} = -(\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{T}}) \mathbf{n} + \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{Q}} + \overline{\text{div}} \mathbf{M} + (\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{M}}) \mathbf{n}$$

La partie tangente de cette équation vectorielle est :

$$\boxed{\overline{\text{div}} \mathbf{M} + \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}}$$

Soit en termes de composantes sur la base naturelle :

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} + M^{\gamma\beta} \Gamma_{\gamma\beta}^\beta + M^{\alpha\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}^\beta + \overline{e}_{\beta\gamma} Q^\gamma = 0$$

La partie normale de cette équation vectorielle est :

$$-\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{T}} + \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$$

On va montrer que cette équation est une identité. Pour alléger les notations, on pose :

$$\overline{\mathbf{I}}_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 ; \quad \overline{\mathbf{I}}_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 ; \quad \overline{\mathbf{I}}_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x^3)^2 \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3$$

Ces trois tenseurs sont des tenseurs de surface symétriques. De plus, on rappelle les propriétés suivantes :

$$\mathbf{A} \otimes \overline{\mathbf{B}} = \text{Tr}(\mathbf{A} \otimes \overline{\mathbf{B}}^t) \quad \forall (\mathbf{A}, \overline{\mathbf{B}}) \text{ tenseurs du second ordre}$$

$$\mathbf{A} \otimes \overline{\mathbf{B}} = 0 \quad \forall \mathbf{A} \text{ symétrique et } \overline{\mathbf{B}} \text{ antisymétrique}$$

$$\overline{\mathbf{E}}^t = -\overline{\mathbf{E}}$$

$$\begin{aligned} -\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{T}} &= -\overline{\mathbf{E}} \otimes (\overline{\mathbf{I}}_0 + \overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{B}} \otimes \overline{\mathbf{E}}) \\ &= -\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_0 - \overline{\mathbf{E}} \otimes (\overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{B}} \otimes \overline{\mathbf{E}}) \\ &= 0 - \text{Tr}(\overline{\mathbf{E}} \otimes (\overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{B}} \otimes \overline{\mathbf{E}})^t) \\ &= -\text{Tr}(\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{B}} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1) \\ &= \text{Tr}(\overline{\mathbf{B}} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{M}} &= -\mathbf{B} \otimes (\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1) - \mathbf{B} \otimes (\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_2 \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{B}} \otimes \overline{\mathbf{E}}) \\ &= -\text{Tr}(\mathbf{B} \otimes (\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1)^t) - \text{Tr}(\mathbf{B} \otimes (\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_2 \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{B}} \otimes \overline{\mathbf{E}})^t) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}}) + \text{Tr}(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{B}} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_2 \otimes \overline{\mathbf{E}}) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}}) + \text{Tr}((\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{B}}) \otimes (\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_2 \otimes \overline{\mathbf{E}})) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}}) + \text{Tr}((\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{B}}) \otimes (\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_2 \otimes \overline{\mathbf{E}})^t) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}}) + (\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{B}}) \otimes (\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_2 \otimes \overline{\mathbf{E}}) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}}) + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{T}} + \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{M}} &= \text{Tr}(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1) + \text{Tr}(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}}) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{B} \otimes (\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1 + \overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}})) \\ &= -\text{Tr}(\mathbf{B} \otimes (\overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1)^t) \\ &= -\mathbf{B} \otimes (\overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{I}}_1) \\ &= -\mathbf{B} \otimes (\overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}} - (\overline{\mathbf{I}}_1 \otimes \overline{\mathbf{E}})^t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la partie normale de l'équilibre des moments est une identité. Elle ne fournit donc pas une équation utile.

5.3 Conclusion

Le principe fondamental appliqué aux coques nous fournit 5 équations différentielles qui régissent les trois tenseurs de surface \mathbf{T} , \mathbf{Q} et \mathbf{M} :

$$\begin{cases} \text{Tg}(\mathbf{p}) + \overline{\text{div}}\mathbf{T} - \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \\ p^3 + \mathbf{T} \otimes \overline{\mathbf{B}} + \overline{\text{div}}\mathbf{Q} = 0 \\ \overline{\text{div}}\mathbf{M} + \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

La dernière équation permet une élimination de \mathbf{Q} :

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\text{div}}\mathbf{M} + \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\text{div}}\mathbf{M} - \mathbf{Q} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\mathbf{Q} = \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\text{div}}\mathbf{M} = \overline{\text{div}}\widetilde{\mathbf{M}}$$

On peut donc se ramener aux trois équations différentielles :

$$\begin{cases} \text{Tg}(\mathbf{p}) + \overline{\text{div}}\mathbf{T} - \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\text{div}}\mathbf{M} = \mathbf{0} \\ p^3 + \mathbf{T} \otimes \overline{\mathbf{B}} + \overline{\text{div}}(\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\text{div}}\mathbf{M}) = 0 \end{cases}$$

soit encore si on utilise $\widetilde{\mathbf{M}}$:

$$\begin{cases} \text{Tg}(\mathbf{p}) + \overline{\text{div}}\mathbf{T} - \mathbf{B} \otimes \overline{\text{div}}\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{0} \\ p^3 + \mathbf{T} \otimes \overline{\mathbf{B}} + \overline{\text{div}}\overline{\text{div}}\widetilde{\mathbf{M}} = 0 \end{cases}$$

Il est à noter que contrairement à l'étude des déformations des coques, la définition des tenseurs de contraintes généralisées et l'établissement des équations d'équilibre n'ont fait l'objet d'aucune approximation. Les équations d'équilibre sont donc tout à fait générales.

Chapitre 6

Loi de comportement élastique des coques de Love-Kirchhoff

La loi de comportement d'un milieu surfacique doit être une relation entre les tenseurs de contraintes généralisées et les tenseurs qui caractérisent les changements dans la surface, c'est à dire la déformation dans la surface et les variations de courbure.

Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'au coques de Love-Kirchhoff, c'est à dire que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- petites déformations ($\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} \ll 1$ et $\frac{\|\bar{\xi}\|}{R} \ll 1$)
- coque mince ($\frac{h}{R} \ll 1$),
- dérivées secondes petites devant la courbure ($R\|\partial_{\alpha\beta}\bar{\xi}\| \ll 1$ et $\partial_{\alpha}R \sim 1$)

On a vu que dans ces conditions, il existe deux tenseurs de surface qui caractérisent les changements locaux dans la surface : un tenseur des petites déformations $\bar{\varepsilon}$ et un tenseur de variation de courbure \mathbf{K} linéaire en $\bar{\xi}$.

Pour établir la loi de comportement élastique des coques de Love-Kirchhoff, on va poser que la coque considérée comme tridimensionnelle est un milieu continu élastique et en tirer les conséquences.

6.1 Loi élastique (première version)

Dans une coque élastique considérée comme un solide tridimensionnel, la loi de comportement est :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\text{Tr}\sigma \mathbf{G}$$

et en particulier, la partie tangente de ε est :

$$\text{Tg}(\varepsilon) = \frac{1+\nu}{E}\text{Tg}(\sigma) - \frac{\nu}{E}\text{Tr}\sigma \mathbf{A}$$

La plupart des auteurs font une hypothèse supplémentaire, parfois appelée quatrième hypothèse de Love-Kirchhoff¹ :

$$\sigma^3_3 \ll \text{Tr}\sigma$$

1. On verra dans la section qui suit que cette hypothèse n'est pas vraiment nécessaire

On a alors

$$\text{Tr} \boldsymbol{\sigma} \simeq \text{Tr Tg}(\boldsymbol{\sigma})$$

et la partie tangente de $\boldsymbol{\varepsilon}$ devient:

$$\text{Tg}(\boldsymbol{\varepsilon}) \simeq \frac{1+\nu}{E} \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{\nu}{E} \text{Tr Tg}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{A}$$

En retournant la partie tangente de la loi, on obtient:

$$\text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) \simeq \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu) \text{Tg}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \nu \text{Tr Tg}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{A}]$$

Or, sous les hypothèses de Love-Kirchhoff, $\text{Tg}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - x^3 \mathbf{K}$.

On obtient donc l'expression de $\text{Tg}(\boldsymbol{\sigma})$ en fonction de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et \mathbf{K} :

$$\text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nu \text{Tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A}] - x^3 \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu) \mathbf{K} + \nu \text{Tr} \mathbf{K} \mathbf{A}]$$

On peut alors calculer les expressions de \mathbf{T} et \mathbf{M} en fonction de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} \text{Tg}(\mathbf{I}_0) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nu \text{Tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A}] \\ \text{Tg}(\mathbf{I}_1) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu) \mathbf{K} + \nu \text{Tr} \mathbf{K} \mathbf{A}] \\ \text{Tg}(\mathbf{I}_2) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x^3)^2 \text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) dx^3 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nu \text{Tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A}] \end{aligned}$$

La loi de comportement élastique des coques de Love-Kirchhoff est donc:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nu \text{Tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A}] \\ &\quad - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu) \mathbf{K} + \nu \text{Tr} \mathbf{K} \mathbf{A}] \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{B} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \\ \mathbf{M} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} [(1-\nu) \mathbf{K} + \nu \text{Tr} \mathbf{K} \mathbf{A}] \\ &\quad + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} [(1-\nu) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nu \text{Tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A}] \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{B} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

On a vu que si la coque est suffisamment mince, les seconds termes peuvent être négligés. On obtient alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nu \text{Tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A}] \\ \mathbf{M} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} [(1-\nu) \mathbf{K} + \nu \text{Tr} \mathbf{K} \mathbf{A}] \end{aligned}$$

6.2 Loi élastique (seconde version)

La quatrième hypothèse de Love-Kirchhoff n'est pas véritablement nécessaire: on a vu que les trois premières impliquent que le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ est un tenseur tangent. Le

tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ n'est donc pas tangent. En utilisant la loi de comportement élastique tridimensionnelle classique non modifiée:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{G} \right] = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{G} \right]$$

Il est facile de voir que, dans la base naturelle de la surface, les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ sont de la forme:

$$\sigma_{\alpha\beta} \neq 0 ; \sigma_{3\alpha} = 0 ; \sigma_{33} \neq 0$$

La partie tangente de $\boldsymbol{\sigma}$ est :

$$\text{Tg}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \text{Tg}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{A} \right]$$

En reprenant les calculs comme précédemment, on obtient une loi de comportement légèrement différente:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \text{Tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A} \right] \\ &\quad - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \mathbf{K} + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \text{Tr} \mathbf{K} \mathbf{A} \right] \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{B} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \\ \mathbf{M} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \left[(1-\nu) \mathbf{K} + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \text{Tr} \mathbf{K} \mathbf{A} \right] \\ &\quad + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \left[(1-\nu) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \text{Tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A} \right] \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \mathbf{B} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

ou encore pour les coques minces:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \text{Tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A} \right] \\ \mathbf{M} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \bar{\mathbf{E}} \bar{\otimes} \left[(1-\nu) \mathbf{K} + \frac{\nu(1-\nu)}{1-2\nu} \text{Tr} \mathbf{K} \mathbf{A} \right] \end{aligned}$$

Cette forme n'est jamais donnée dans la littérature.

6.3 Contradictions inhérentes aux hypothèses de L-K

Avec ou sans la quatrième hypothèse de Love-Kirchhoff, les termes $\sigma_{\alpha 3}$ sont nuls. Le produit $\mathbf{n} \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma}$ est donc toujours un vecteur normal (ou un vecteur nul si on fait la quatrième hypothèse). Dans tous les cas, $\text{Tg}(\mathbf{n} \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma})$ est un vecteur nul. Le tenseur tranchant \mathbf{Q} , qui est une intégrale de $\text{Tg}(\mathbf{n} \bar{\otimes} \boldsymbol{\sigma})$ serait donc toujours nul.

Cette conséquence est uniquement due aux hypothèses de Love-Kirchhoff: La simplification cinématique du champ de déplacements $\boldsymbol{\xi}$ entraîne une simplification du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Les contraintes dans la coque pour la direction \mathbf{n} sont mal représentées et aboutissent à cette contradiction.

Si on veut obtenir une meilleure représentation des contraintes transverses, il faut remettre en question tout ou partie des hypothèses de Love-Kirchhoff.

Chapitre 7

Le problème des coques élastiques

7.1 Énoncé du problème

Le problème des coques élastiques peut se résumer ainsi:

Trouver \mathbf{T} , \mathbf{M} , $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, \mathbf{K} et $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ satisfaisant aux équations suivantes:

- Equations d'équilibre (3 équations différentielles):

$$\begin{aligned}\text{Tg}(\mathbf{p}) + \overline{\text{div}}\mathbf{T} - \mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\text{div}}\mathbf{M} &= \mathbf{0} \\ p^3 + \mathbf{T} \otimes \overline{\mathbf{B}} + \overline{\text{div}}(\overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\text{div}}\mathbf{M}) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

- Equations de comportement¹:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nu\text{Tr}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A}] \\ \mathbf{M} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \overline{\mathbf{E}} \otimes \overline{\mathbf{K}} [(1-\nu)\mathbf{K} + \nu\text{Tr}\mathbf{K} \mathbf{A}]\end{aligned}$$

- Expressions de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et \mathbf{K} en fonction de $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ ²:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}\text{Tg}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) + \overline{\text{grad}}^t\text{Tg}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) - 2\bar{\boldsymbol{\xi}}^3 \mathbf{B}] \\ \mathbf{K} &= 2 \text{Sym}(\mathbf{B} \otimes \overline{\text{grad}}\text{Tg}(\bar{\boldsymbol{\xi}})) + \text{Tg}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \otimes \overline{\text{grad}}\mathbf{B} + \overline{\text{grad}}\overline{\text{grad}}\bar{\boldsymbol{\xi}}^3 - \bar{\boldsymbol{\xi}}^3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}\end{aligned}$$

- Il faut ajouter à ces équations les conditions aux limites spécifiques au problème traité.

La formulation généralement utilisée est la formulation en déplacement. Elle consiste à remplacer dans les équations d'équilibre \mathbf{T} et \mathbf{M} en fonction de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et \mathbf{K} , puis à remplacer $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et \mathbf{K} en fonction de $\bar{\boldsymbol{\xi}}$. On obtient ainsi trois équations différentielles en $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ dont la solution est le champ de déplacement de surface. La solution doit être complètement déterminée par les conditions aux limites.

À partir de $\bar{\boldsymbol{\xi}}$, on peut alors calculer $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et \mathbf{K} , puis \mathbf{T} et \mathbf{M} , puis enfin \mathbf{Q} . On peut aussi calculer l'approximations de Love-Kirchhoff de $\boldsymbol{\varepsilon}$ à partir $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et en déduire l'approximation de $\boldsymbol{\sigma}$ par la loi de comportement tridimensionnelle.

1. On la donne ici dans le cas des coques minces de Love-Kirchhoff et dans la version couramment trouvée dans la littérature, mais on peut la changer ou la compléter si nécessaire.

2. On les donne ici dans le cas des coques minces en petites déformations au sens des coques (Voir les conditions établies au chapitre 3).

7.2 Les conditions aux limites

En élasticité, les conditions aux limites sont habituellement de quatre sortes : les conditions aux limites portant sur les déplacements imposés, les conditions aux limites portant sur les efforts appliqués, des relations linéaires entre déplacements et efforts (liaisons élastiques) ou des relations linéaires imposées entre les déplacements (ou entre certaines composantes des déplacements).

7.2.1 Conditions aux limites de déplacement

Elles sont généralement de deux sortes:

- Les déplacements imposés:

On impose la valeur de $\bar{\xi}$ ou la valeur de certaines composantes de $\bar{\xi}$ sur certains points ou le long d'une courbe.

Les valeurs imposées nulles correspondent en général à des liaisons rigides avec le milieu extérieur à la coque (appuis, encastremets ...).

Les valeurs imposées non nulles correspondent à des problèmes où on désire connaître les effets provoqués par le déplacement imposé³.

- Dérivées de déplacement imposés:

Certaines liaisons avec le milieu extérieur imposent non seulement des valeurs aux déplacements, mais aussi des valeurs aux dérivées des déplacements dans certaines directions (typiquement: les encastremets).

Par exemple, si une coque est encastree le long d'une courbe \mathcal{C} , de trièdre de Darboux-Ribeaucourt $\{\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\}$, les "rotations" autour de \mathbf{t} sont interdites pas la liaison. Les dérivés de $\bar{\xi}^3$ dans la direction \mathbf{u} sont donc nulles, ce qui s'écrit: $\overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 \otimes \mathbf{u} = 0$ ⁴.

7.2.2 Conditions aux limites d'effort

Si on utilise la formulation en déplacement, les conditions aux limites d'effort doivent être transformées en conditions aux limites portant sur $\bar{\xi}$. On calcule donc $\bar{\varepsilon}$ et \mathbf{K} , puis \mathbf{T} et \mathbf{M} , puis enfin \mathbf{Q} en fonction de la solution générale $\bar{\xi}$, puis on exprime les efforts appliqués sur la coque. Par exemple, si des efforts sont appliqués sur le bord \mathcal{C} de trièdre de Darboux-Ribeaucourt $\{\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\}$, on obtient les conditions sur $\bar{\xi}$ suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\bar{\xi}) \otimes \mathbf{u} &= \mathbf{f} \text{ (2 équations)} \\ \mathbf{M}(\bar{\xi}) \otimes \mathbf{u} &= \mathbf{m} \text{ (2 équations)} \\ \mathbf{Q}(\bar{\xi}) \otimes \mathbf{u} &= q \text{ (1 équation)} \end{aligned}$$

où \mathbf{f} , \mathbf{m} , q sont respectivement la tension linéique tangente, le moment linéique tangent⁵ et l'effort linéique tranchant appliqués par le milieu extérieur sur la courbe \mathcal{C} . Ces conditions portent donc sur les dérivées d'ordre 1 ou 2 des composantes de $\bar{\xi}$.

3. Par exemple, quels sont les effets de l'affaissement d'un appui? Quels sont les effets d'un déplacement imposé le long d'une courbe? etc.

4. Pour un encastrement, il est inutile de poser une condition sur la dérivée de $\bar{\xi}^3$ dans la direction \mathbf{t} . En effet, la valeur de $\bar{\xi}$ est déjà imposée le long de la courbe \mathcal{C} , ce qui impose la valeur de sa dérivée le long de cette courbe.

5. On rappelle que la définition des efforts intérieurs dans une coque ne permet pas d'appliquer des moments linéiques normaux.

Il est à noter que si un bord est non chargé, il donne lieu à des conditions aux limites (dite de "bord libre") : Il faut écrire que sur ce bord on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\bar{\xi}) \otimes \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \text{ (2 équations)} \\ \mathbf{M}(\bar{\xi}) \otimes \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \text{ (2 équations)} \\ \mathbf{Q}(\bar{\xi}) \otimes \bar{\mathbf{u}} &= 0 \text{ (1 équation)} \end{aligned}$$

7.2.3 Relations linéaires entre efforts et déplacements

Ce type de condition aux limites intervient lorsque la liaison avec le milieu extérieur fait intervenir des liaisons élastiques. On modélise une liaison élastique par une relation de proportionnalité entre déplacement et effort, ou entre rotation et moment.

Par exemple, si la coque est liée au milieu extérieur par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k dans la direction *unitaire* \mathbf{v} , l'effort appliqué dans la direction \mathbf{v} est proportionnel au déplacement dans la direction \mathbf{v} , ce qui s'écrit:

$$\mathbf{F}_l \otimes \bar{\mathbf{v}} = [\mathbf{T}(\bar{\xi}) \otimes \bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{Q}(\bar{\xi}) \otimes \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{n}] \otimes \bar{\mathbf{v}} = k \bar{\xi} \otimes \bar{\mathbf{v}}$$

Les liaisons élastiques peuvent aussi être des relations entre rotation et moment (ressort spiral de raideur k autour d'une direction *unitaire* \mathbf{v}). La condition s'écrit alors:

$$\mathbf{M}_l \otimes \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{M}(\bar{\xi}) \otimes \bar{\mathbf{u}} = k \overline{\text{grad} \xi}^3 \otimes \bar{\mathbf{v}}$$

7.2.4 Relations linéaires entre déplacements

Il arrive que pour modéliser certains problèmes, on ait besoin d'imposer des relations entre certains déplacements ou certaines composantes de déplacement.

Par exemple, si la coque est liée en certains points (ou le long d'une courbe) à un solide indéformable, mais libre de se déplacer globalement, alors les points de la coque attachés au solide sont nécessairement liés par une relation qui traduit l'indéformabilité du solide. Le champ de déplacements de ces points est donc un champ de déplacement de solides.

Si on note \mathcal{N} l'ensemble de ces points, la condition s'écrit:

$$\bar{\xi}(N) = \bar{\xi}(M) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{MN} \quad \forall (M, N) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est un vecteur constant, inconnu et à déterminer, qui est le vecteur rotation du solide.

Un autre exemple serait une liaison partielle: un bord ou un point de la coque peut être astreint à rester sur une ligne ou une surface. Dans ce cas, les composantes des déplacements en cet endroit ne sont pas indépendantes et sont liées par des relations pour respecter la liaison.

7.3 Conclusion

Tout comme en élasticité, les conditions aux limites sont déterminantes sur la solution. Leur écriture ne peut se faire que par une analyse physique de l'environnement de la coque à calculer.

En coques, les conditions aux limites posent des problèmes géométriques plus complexes qu'en élasticité tridimensionnelle du fait de la possibilité d'imposer des rotations ou des densités linéiques de moments le long des bords. Il convient de bien réfléchir à la manière dont on doit modéliser les liaisons avec l'extérieur pour écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour la détermination

de la solution. Cette modélisation est sous la pleine responsabilité de l'ingénieur, et aucune théorie ou logiciel ne peut l'aider dans cette phase.

La résolution à la main des équations différentielles et des conditions aux limites est rarement possible, sauf dans des géométries simples ou dans des problèmes "académiques" où les simplifications sont souvent outrancières. Dans la pratique, on utilisera souvent une méthode par éléments finis. Il est à la charge de l'utilisateur de bien modéliser son problème (la géométrie est modélisée par un maillage surfacique⁶), avec ses conditions aux limites.

En ce qui concerne l'interprétation des résultats, Il convient de savoir quelle théorie de coque a été utilisée dans le calcul (épaisse ou mince, Love-Kirchhoff ou non), et quel type de tenseur moment linéique est affiché dans les résultats (\mathbf{M} ou $\widetilde{\mathbf{M}}$). Certains logiciels fournissent aussi les résultats sous forme de contraintes et de déformations tridimensionnels ($\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$). Il convient de consulter la notice pour savoir comment ces tenseurs sont reconstruits à partir des valeurs de surface, et évaluer le degré de confiance qu'on peut leur accorder.

6. Dans beaucoup de logiciels, les éléments "coques" sont souvent des éléments de plaque, c'est à dire que le comportement de l'élément est celui d'une plaque et non d'une coque. Autrement dit, la courbure interne de l'élément est ignorée. La coque est modélisée par un ensemble de facettes planes, la courbure est "concentrée" aux interfaces entre les éléments.

Chapitre 8

Théorie des plaques élastiques de Love-Kirchhoff

Ici, on considère la théorie des plaques comme un sous produit de la théorie des coques¹.

8.1 Définition d'une plaque

Une plaque est une coque de courbure initiale nulle. Elle est généralement présentée avec des hypothèses restrictives:

- Le chargement est particulier: *Le chargement surfacique \mathbf{p} est uniquement un chargement normal*:

$$\mathbf{p} = p^3(M) \mathbf{n}$$

où M est un point du plan moyen de la plaque.

Cette hypothèse n'est pas véritablement restrictive, car si la plaque est chargée aussi par une densité surfacique dans son plan, ce dernier problème peut être résolu par les techniques de l'élasticité plane, et on peut reconstruire la solution complète d'un chargement \mathbf{p} quelconque par superposition².

- Les déformations sont petites (au sens des coques)
- On se place dans le cadre des hypothèses de Love-Kirchhoff
- La loi de comportement est la loi élastique des coques minces
- Le déplacement $\bar{\xi}(M)$ des points du plan moyen est supposé normal au plan de la plaque.

$$\bar{\xi}(M) \simeq \bar{\xi}^3(M) \mathbf{n}$$

Cette hypothèse est une hypothèse *simplificatrice* qui a des conséquences importantes.

8.2 Equation de la théorie des plaques

On résout les problèmes de plaques en utilisant la formulation en déplacements.

1. On trouvera dans la littérature un grand nombre de traités qui la présentent comme une théorie à part.
2. On rappelle la validité du théorème de superposition en élasticité linéaire.

8.2.1 Tenseur des petites déformations de surface

Le tenseur des petites déformations de surface est nul. En effet:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\overline{\text{grad}} \text{Tg}(\bar{\xi}) + \overline{\text{grad}}^t \text{Tg}(\bar{\xi}) - 2\bar{\xi}^3 \mathbf{B} \right] = \mathbf{0}$$

car $\text{Tg}(\bar{\xi}) = \mathbf{0}$ par hypothèse et $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (le tenseur courbure d'un plan est nul).

Ainsi, en théorie des plaques, les allongements dans la surface moyenne sont nuls (au second ordre près).

8.2.2 Tenseur des variations de courbure

Le tenseur des variations de courbure est

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= 2 \text{Sym}(\mathbf{B} \otimes \overline{\text{grad}} \text{Tg}(\bar{\xi})) + \text{Tg}(\bar{\xi}) \otimes \overline{\text{grad}} \mathbf{B} + \overline{\text{grad}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 - \bar{\xi}^3 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ &= \overline{\text{grad}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 \end{aligned}$$

pour les mêmes raisons que précédemment.

8.2.3 Tenseur tension

La loi de comportement élastique des coques minces :

$$\mathbf{T} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\bar{\varepsilon} + \nu \text{Tr} \bar{\varepsilon} \mathbf{A}] = \mathbf{0}$$

conduit à $\mathbf{T} = \mathbf{0}$, puisque $\bar{\varepsilon} = \mathbf{0}$

Ainsi, en théorie des coques les tensions linéiques sont nulles (au second ordre près).

8.2.4 Tenseur des moments linéiques

La loi de comportement élastique des coques minces conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \overline{\mathbf{E}} \otimes [(1-\nu)\mathbf{K} + \nu \text{Tr} \mathbf{K} \mathbf{A}] \\ &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \overline{\mathbf{E}} \otimes \left[(1-\nu) \overline{\text{grad}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 + \nu \text{Tr} \overline{\text{grad}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 \mathbf{A} \right] \\ &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \overline{\mathbf{E}} \otimes \left[(1-\nu) \overline{\text{grad}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 + \nu \overline{\text{div}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 \mathbf{A} \right] \\ &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \overline{\mathbf{E}} \otimes \left[(1-\nu) \overline{\text{grad}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 + \nu \Delta \bar{\xi}^3 \mathbf{A} \right] \end{aligned}$$

Soit encore:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \overline{\text{grad}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 + \nu \Delta \bar{\xi}^3 \mathbf{A} \right]$$

8.2.5 Equation d'équilibre des plaques

Les équations d'équilibre des coques

$$\begin{aligned} \text{Tg}(\mathbf{p}) + \overline{\text{div}} \mathbf{T} - \mathbf{B} \otimes \overline{\text{div}} \widetilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{0} \\ p^3 + \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} + \overline{\text{div}} \overline{\text{div}} \widetilde{\mathbf{M}} &= 0 \end{aligned}$$

deviennent:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{0} \\ p^3 + \overline{\text{div}} \overline{\text{div}} \widetilde{\mathbf{M}} &= 0 \end{aligned}$$

Il reste donc une équation scalaire:

$$\begin{aligned} 0 &= p^3 + \overline{\text{div}} \overline{\text{div}} \widetilde{\mathbf{M}} \\ -p^3 &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \overline{\text{div}} \overline{\text{div}} \overline{\text{grad}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 + \nu \overline{\text{div}} \overline{\text{div}} (\Delta \bar{\xi}^3 \mathbf{A}) \right] \\ &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \overline{\text{div}} \Delta \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 + \nu \overline{\text{div}} \overline{\text{grad}} \Delta \bar{\xi}^3 \right] \\ &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \Delta \overline{\text{div}} \overline{\text{grad}} \bar{\xi}^3 + \nu \Delta \Delta \bar{\xi}^3 \right] \\ &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[(1-\nu) \Delta \Delta \bar{\xi}^3 + \nu \Delta \Delta \bar{\xi}^3 \right] \\ &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta \Delta \bar{\xi}^3 \end{aligned}$$

finalement, l'équilibre des plaques se réduit à l'équation scalaire:

$$\boxed{\Delta \Delta \bar{\xi}^3 = \frac{12p^3(1-\nu^2)}{Eh^3}}$$

Cette équation différentielle du quatrième ordre a pour solution le déplacement normal d'une plaque sous la pression normale p^3 . Il n'existe pas de solution analytique générale de cette équation en double laplacien (sauf pour des plaques au contour simple). On trouve toutefois dans la littérature des formules donnant des résultats pour les plaques rectangulaires sous des chargements variés³.

8.3 Déformations et contraintes

$\bar{\xi}$ étant calculé, on peut alors calculer \mathbf{K} puis \mathbf{M} .

Le tenseur des petites déformations dans la plaque est

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{Tg}(\boldsymbol{\varepsilon}) = -x^3 \mathbf{K}$$

Le tenseur des contraintes s'en déduit immédiatement.

Dans une plaque, les contraintes et les déformations sont proportionnels à x^3 .

3. Ces résultats proviennent soit de solutions analytiques sous forme de double décomposition en série de Fourier, soit de calculs numériques en différences finies ou en éléments finis.

Chapitre 9

Théorie des voiles

9.1 Définition d'un voile

On appelle *voile* une coque dans laquelle on peut négliger les valeurs des moments linéiques¹. Cette hypothèse se justifie principalement dans deux cas:

- pour les coques très minces pour lesquelles les efforts nécessaires pour la fléchir localement sont négligeables devant les efforts pour l'allonger
- pour les coques dont le matériau ne résiste pas à la flexion²

On pose donc:

$$\mathbf{M} = \mathbf{0} \iff \widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$$

Les autres hypothèses des voiles sont:

- Les déformations sont petites (au sens des coques)
- On se place dans le cadre des hypothèses de Love-Kirchhoff
- La loi de comportement est la loi élastique des coques minces

9.2 Equations d'équilibre des voiles

Les équations d'équilibre des coques

$$\begin{aligned} \text{Tg}(\mathbf{p}) + \overline{\text{div}}\mathbf{T} - \mathbf{B} \otimes \overline{\text{div}}\widetilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{0} \\ p^3 + \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} + \overline{\text{div}} \overline{\text{div}}\widetilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

deviennent

$$\begin{aligned} \text{Tg}(\mathbf{p}) + \overline{\text{div}}\mathbf{T} &= \mathbf{0} \\ p^3 + \mathbf{T} \otimes \mathbf{B} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

D'autre part, les équations d'équilibre des moments montrent que le tenseur tranchant \mathbf{Q} est nul.

1. Cette hypothèse est à rapprocher de celle qui a été faite en théorie des poutres au sujet des fils et des câbles.
2. par exemple du béton non armé, ou en première approximation une construction en pierres jointes.

Les équations d'équilibre des voiles se ramènent donc à trois équations différentielles scalaires à trois inconnues (car \mathbf{T} est symétrique). La solution de ce système n'existe pas toujours. S'il n'y a pas de solution, c'est que l'hypothèse de voile ne peut être appliquée à ce cas³.

Si la solution existe, on peut donc exceptionnellement résoudre le problème sans tout exprimer en fonction des déplacements⁴.

9.3 Calcul des déplacements

\mathbf{T} étant calculé, on peut alors en déduire $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ avec la loi de comportement sous la forme :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{Eh} [(1 - \nu) \mathbf{T} - \nu \text{Tr} \bar{\mathbf{T}} \mathbf{A}]$$

Et enfin calculer les déplacements par intégration des trois équations différentielles:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}} \text{Tg}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) + \overline{\text{grad}}^t \text{Tg}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) - 2\bar{\boldsymbol{\xi}}^3 \mathbf{B}]$$

9.4 Déformations et contraintes

Puisque le tenseur \mathbf{M} est négligé, il s'en suit que le tenseur de variation de courbure \mathbf{K} est aussi négligé. Le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ est donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{Tg}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Le tenseur des petites déformations est donc constant dans l'épaisseur de la coque. Il en est de même pour le tenseur des contraintes.

3. En particulier, la troisième équation montre que si le voile est plan, il ne peut pas supporter de chargement surfacique normal. Dans un tel cas, il est impossible de supposer que $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, il faut utiliser la théorie des plaques.

4. Toutefois, il n'est pas interdit de tout exprimer en fonction des déplacements pour les calculer directement. On obtient en général un système d'équations plus compliqué.

Chapitre 10

Théorie des membranes

10.1 Définition

Une membrane est un voile dont la surface moyenne est un plan. On cumule donc les hypothèses des plaques (chargement uniquement normal) et les hypothèses des voiles (pas de moments linéiques). Cet ensemble d'hypothèses convient bien pour modéliser une plaque mince de caoutchouc par exemple¹.

10.2 Équations d'équilibre des membranes

Les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \text{Tg}(\mathbf{p}) + \overline{\text{div}}\mathbf{T} - \mathbf{B} \otimes \overline{\text{div}}\widetilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{0} \\ p^3 + \mathbf{T} \otimes \overline{\mathbf{B}} + \overline{\text{div}} \overline{\text{div}}\widetilde{\mathbf{M}} &= 0 \end{aligned}$$

se réduisent donc à :

$$\begin{aligned} \overline{\text{div}}\mathbf{T} &= \mathbf{0} \\ p^3 + \mathbf{T} \otimes \overline{\mathbf{B}} &= 0 \end{aligned}$$

Strictement parlant, les équations d'équilibre ne sont exactes que sur la configuration déformée. Or, jusqu'à maintenant, on les a appliquées sur la configuration initiale, en supposant que les déplacements étaient petits (On rappelle que c'est l'habitude en élasticité linéaire : on confond les variables de Lagrange et les variables d'Euler. Si on ne fait pas cette approximation, le système différentiel n'est plus linéaire et on perd le bénéfice du théorème de superposition).

En théorie des membranes, si on continue à faire cette approximation, on a $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ et les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{aligned} \overline{\text{div}}\mathbf{T} &= \mathbf{0} \\ p^3 &= 0 \end{aligned}$$

La dernière équation montre qu'une membrane ne peut résister à aucun chargement normal!

On doit donc écrire les équations d'équilibre sur la configuration déformée. La courbure initiale étant nulle, la courbure dans la configuration déformée est le tenseur de variation de courbure \mathbf{K} .

1. ou encore un film plan de savon

Les équations d'équilibre sur la configuration déformée s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\overline{\text{div}} \mathbf{T} &= \mathbf{0} \\ p^3 + \mathbf{T} \otimes \overline{\mathbf{K}} &= 0\end{aligned}$$

et les équations d'équilibre sur la configuration initiale (non chargée et à courbure nulle) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\overline{\text{div}} \mathbf{T}_0 &= \mathbf{0} \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Elles montrent qu'il peut exister une tension initiale \mathbf{T}_0 dans une membrane plane non chargée telle que $\overline{\text{div}} \mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$

10.3 Hypothèses complémentaires

On suppose que la tension initiale \mathbf{T}_0 dans la membrane est une *tension isotrope uniforme*²:

$$\mathbf{T}_0 = T_0 \mathbf{A}$$

où T_0 est une constante. L'équilibre initial est évidemment respecté:

$$\overline{\text{div}}(T_0 \mathbf{A}) = T_0 \overline{\text{div}} \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

On suppose de plus que (comme pour les plaques) le déplacement des points du plan moyen est normal:

$$\overline{\boldsymbol{\xi}} = \overline{\xi}^3 \mathbf{n}$$

On a vu en théorie des plaques que cette hypothèse entraîne:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$$

et

$$\mathbf{K} = \overline{\text{grad}} \overline{\text{grad}} \overline{\xi}^3$$

Les allongements dans la membrane étant nuls (en première approximation), la tension dans la membrane ne change pas sous l'effet du chargement, et les équations d'équilibre sur la configuration déformée s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\overline{\text{div}}(T_0 \mathbf{A}) &= \mathbf{0} \\ p^3 + T_0 \mathbf{A} \otimes \overline{\mathbf{K}} &= 0\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{0} \\ p^3 + T_0 \text{Tr} \mathbf{K} &= 0\end{aligned}$$

2. C'est l'hypothèse habituellement posée dans les traités. En fait il suffit de choisir une tension initiale qui satisfait l'équilibre initial, c'est à dire $\overline{\text{div}} \mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$. On obtiendrait une équation des membranes légèrement plus compliquée.

10.4 Équation des membranes

En remplaçant \mathbf{K} par son expression en fonction de $\bar{\xi}$, il vient:

$$p^3 + T_0 \overline{\text{Trgrad grad}} \bar{\xi}^3 = 0$$

soit encore :

$$\boxed{\Delta \bar{\xi}^3 = -\frac{p^3}{T_0}}$$

Cette équation différentielle du second ordre a pour solution le déplacement normal d'une membrane initialement tendue sous une tension isotrope T_0 et soumise à une pression normale p^3 . Les contraintes dans la membrane chargée sont en première approximation les mêmes que la tension initiale.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Étude des surfaces	5
2.1	Définition d'une surface	5
2.2	Plan tangent	6
2.2.1	Base naturelle associée à un paramétrage	6
2.2.2	Plan tangent	6
2.2.3	Normale à une surface	6
2.2.4	Convention d'indice	7
2.3	Tenseurs de surface	7
2.3.1	Tenseur métrique de surface	9
2.3.2	Tenseur d'orientation de surface	9
2.3.3	Produits vectoriels	10
2.3.4	Nouvelle expression de la normale	11
2.4	L'analyse dans les surfaces	11
2.5	Métrie dans les surfaces	12
2.5.1	Élément de longueur	12
2.5.2	Élément de surface	12
2.6	Tenseur de courbure normale	13
2.6.1	Définition du tenseur de courbure normale	13
2.6.2	Interprétation géométrique	14
2.6.3	Propriétés de la courbure normale	15
2.7	Variations de la base naturelle	16
2.8	Dérivée d'un vecteur	17
2.8.1	Dérivée d'un vecteur tangent	17
2.8.2	Dérivée d'un vecteur spatial	17
2.9	Système de coordonnées spatial induit par la surface	18
2.9.1	Relation entre la métrique d'espace et la métrique de surface	18

2.9.2	Relation entre les Γ_{ij}^k et les $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$	19
2.10	Le trièdre de Darboux-Ribeaucourt	20
2.11	Étude des champs scalaires surfaciques	20
2.12	Étude des champs vectoriels surfaciques tangents	21
2.12.1	Gradient de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent	21
2.12.2	Divergence de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent	22
2.12.3	Rotationnel de surface d'un champ vectoriel surfacique tangent	23
2.12.4	Formule de Stokes pour les champs vectoriels surfaciques tangents	24
2.12.5	Formule de la divergence pour les champs vectoriels surfaciques tangents	24
2.13	Étude des champs tensoriels surfaciques tangents	25
2.13.1	Gradient de surface d'un champ tensoriel surfacique tangent du second ordre	25
2.13.2	Divergence de surface d'un champ tensoriel surfacique tangent du second ordre	26
2.13.3	Formule de la divergence pour les champs tensoriels surfaciques tangents du second ordre	26
2.14	Définition d'une coque	27
3	Déformations dans les coques	29
3.1	Déformation de la surface moyenne	29
3.1.1	Base naturelle de \mathcal{S}'	30
3.1.2	Tenseur métrique de surface de \mathcal{S}'	30
3.1.3	Tenseur de déformation de surface	30
3.1.4	Tenseur des petites déformations de surface	31
3.1.5	Normale unitaire de \mathcal{S}'	32
3.1.6	Tenseur courbure de \mathcal{S}'	33
3.1.7	Variation de courbure due au déplacement	33
3.1.8	Tenseur de variation de courbure en petites déformations	34
3.1.9	Conclusion	36
3.2	Petites déformations dans les coques	37
3.2.1	Hypothèses de Love-Kirchhoff	38
4	Efforts intérieurs dans les coques	41
4.1	Coupure dans une coque	41
4.2	Contraintes généralisées dans une coque	41
4.3	Les trois tenseurs des contraintes généralisées	42
4.3.1	Surface coupure dans une coque	43
4.3.2	Relation entre les contraintes généralisées et les contraintes	44

4.3.3	Tenseur tension ou Tenseur des efforts de membrane	44
4.3.4	Tenseur tranchant	45
4.3.5	Tenseur des moments linéiques	46
4.4	Conclusion	47
5	Équations d'équilibre local des coques	49
5.1	Équilibre des résultantes	50
5.2	Équilibre des moments	51
5.3	Conclusion	55
6	Loi de comportement élastique des coques de Love-Kirchhoff	57
6.1	Loi élastique (première version)	57
6.2	Loi élastique (seconde version)	58
6.3	Contradictions inhérentes aux hypothèses de L-K	59
7	Le problème des coques élastiques	61
7.1	Énoncé du problème	61
7.2	Les conditions aux limites	62
7.2.1	Conditions aux limites de déplacement	62
7.2.2	Conditions aux limites d'effort	62
7.2.3	Relations linéaires entre efforts et déplacements	63
7.2.4	Relations linéaires entre déplacements	63
7.3	Conclusion	63
8	Théorie des plaques élastiques de Love-Kirchhoff	65
8.1	Définition d'une plaque	65
8.2	Equation de la théorie des plaques	65
8.2.1	Tenseur des petites déformations de surface	66
8.2.2	Tenseur des variations de courbure	66
8.2.3	Tenseur tension	66
8.2.4	Tenseur des moments linéiques	66
8.2.5	Equation d'équilibre des plaques	67
8.3	Déformations et contraintes	67

9	Théorie des voiles	69
9.1	Définition d'un voile	69
9.2	Equations d'équilibre des voiles	69
9.3	Calcul des déplacements	70
9.4	Déformations et contraintes	70
10	Théorie des membranes	71
10.1	Définition	71
10.2	Équations d'équilibre des membranes	71
10.3	Hypothèses complémentaires	72
10.4	Équation des membranes	73